MA2501, Vårsemestre 2007, Numeriske metoder for lineær algebra

Elena Celledoni

1 Introduksjon

Vi vil approksimere løsningen av lineære systemet av n ligningene og n ukjente:

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \tag{1}$$

hvor $(x_1, \cdots, x_n)$ er de ukjente. Gitt $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, og b_i, $i = 1, \cdots, n$.

Vi kan skrive (1) i matrise form ved å definere:

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

så skriver vi (1) i følgende måte:

$$A \cdot x = b. \tag{2}$$

Lineære systemer kan løses veldig enkelt når A har en spesiell form, for eksempel når A er en diagonal matrise eller en triangulærmatrise og $a_{i,i} \neq 0$ for $i = 1, \ldots, n$:

- A diagonalmatrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcrrcl} a_{1,1}x_1 & = & b_1 & x_1 & = & \frac{b_1}{a_{1,1}} \\ a_{2,2}x_2 & = & b_2 & x_2 & = & \frac{b_2}{a_{2,2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,n}x_n & = & b_n & x_n & = & \frac{b_n}{a_{n,n}} \end{array}$$

- A triangulærmatrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \cdots \quad \vdots \quad \vdots & \Rightarrow & \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_j}{a_{1,1}} \\ x_2 & = & \frac{b_2 - \sum_{j=3}^{n} a_{2,j}x_j}{a_{2,2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n & = & \frac{b_n}{a_{n,n}} \end{array} \qquad (3)$$

Formlene (3) kalles innsettingsalgoritmen.

2 Gauss eliminasjon

Gauss eliminasjon er en prosess der man reduserer system (1) til et triangulær system med den samme løsningen som (1). Som sagt triangulære systemer løses veldig lett ved å bruke formler (3).

Transfomasjonen i den øvre-triangulære formen gjennomføres i $n-1$ skritt:

$$Ax = b \to A^{(1)}x = b^{(1)} \to \cdots \to A^{(k)}x = b^{(k)} \to \cdots \to A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$$

alle systemer $A^{(k)}x = b^{(k)}$ $k = 1, \ldots, n-1$ har den samme løsningen. Den siste, $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$, er i triangulær formen og den k. er

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1,1} & \cdots & \tilde{a}_{1,k} & \tilde{a}_{1,k+1} & \cdots & \tilde{a}_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \tilde{a}_{k,k} & \tilde{a}_{k,k+1} & \cdots & \tilde{a}_{k,n} \\ \vdots & \vdots & 0 & \tilde{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \tilde{a}_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{n,k+1} & \cdots & \tilde{a}_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Man finner $A^{(1)}x = b^{(1)}$ fra $Ax = b$ ved å substituere den 2., 3., n. ligningen i $Ax = b$ ved tilsværende lineære kombinasjoner av den 1. ligningen med den 2., 3. o.s.v. For å finne $A^{(2)}x = b^{(2)}$ (og de følgende) den samme prosessen er repetert med å ta hensyn til kolonnene fra 2. til n. og radene fra 2. til n.

2.1 Eksempel

Gitt:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &=& 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &=& 5 \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

vi vil redusere det i triangulær formen.

Vi begynne med å substituere den andre ligningen med en lineær kombinasjon av de første to ligningene, d.v.s. vi substituere
$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3$ med

$$(2x_1 - x_2 - 2x_3) + (-2) \cdot (x_1 + 4x_2 + x_3) = 3 + (-2) \cdot 6, \Rightarrow -9x_2 - 4x_3 = -9.$$

Vi substituere den 3. ligningen med en lineær kombinasjon av den 3. og den 1. ligningen:

$$(x_1 + 3x_2 + 2x_3) + (-1) \cdot (x_1 + 4x_2 - x_3) = 5 + (-1) \cdot 6, \Rightarrow -x_2 + x_3 = -1.$$

Så får vi en nytt system

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 6 \\ -9x_2 - 4x_3 & = & -9 \\ -x_2 + x_3 & = & -1 \end{array} \qquad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Koeffisienter i lineære kombinasjoner av ligningene er $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, og de er valgt slik at i det nye systemet får vi den andre og det tredje elementet lik null, på denne måten har vi "eliminert" to koeffisienter i systemet.

Nå jobber vi bare med de to siste ligningene:

$$\begin{array}{rcr} -9x_2 - 4x_3 & = & -9 \\ -x_2 + x_3 & = & -1 \end{array} \tag{6}$$

Vi substituere den siste ligning med

$$(-x_2 + x_3) + (-\frac{1}{9}) \cdot (-9x_2 - 4x_3) = -1 + \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot (-9) \Rightarrow \frac{13}{9} x_3 = 0.$$

Koeffisienten av lineære kombinasjonen er $\frac{1}{9}$.

Til slutt får vi det følgende lineære systemet:

$$\begin{array}{rcr} x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 6 \\ -9x_2 - 4x_3 & = & -9 \\ \frac{13}{9} x_3 & = & 0 \end{array} \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{13}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

og løsning kan beregnes ved å bruke insettingsalgoritmen og man starter fra den siste linningen $x_3 = 0$, og videre oppover $-9x_2 = -9 \Rightarrow x_2 = 1$ og $x_1 + 4 = 6 \Rightarrow x_1 = 2$ og man får

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Merk nå at for å "eliminere" den første kolonnen brukte vi de to koeffisienter:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og for å "eliminere" den andre kolonnen brukte vi

$$\frac{1}{9}.$$

Ved å bruke disse koeffisientene bygger vi nå en triangulære matrise L:

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix}.$$

Hvis fra (7) tar vi nå matrisa $U := A^{(2)}$ og beregner vi $L \cdot U$, får vi A tilbake.

Generelt når vi beregner Gauss eliminasjon, beregner vi samtidig en faktorisering av matrisa $A = LU$,hvor L og U er to triangulære matriser.

Dette er veldig praktisk hvis man vil beregne løsningen av to (eller flere) systemer med den samme koeffisienter-matrisen A og forskjellige vektorer b og $\hat{b}$ på høyre side av ligningen. I dette tilfellet kan man bruke den samme faktorisering $LU = A$ to ganger og beregne to forskjellige innsettigsalgoritmer, den første med b og den andre med $\tilde{b}$.

Dette er også brukt for å beregne determinanten til A, siden $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{i,i}$, og for å finne A^{-1}. I vårt tilfelle har vi

$$\det(A) = 1 \cdot (-9) \cdot \frac{13}{9} = -13$$

og

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{13}{9} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{9} & \frac{7}{13} \\ 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{13} \\ 0 & 0 & \frac{9}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{9} & -\frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix}$$

Merk at det er mye lettere å finne den inverse av en triangulære matrise enn av en generell matrise.

2.2 Gauss eliminasjon: generell algoritme

For den generelle matrisen (1) har vi:

$$Ax = b \to A^{(1)}x = b^{(1)}$$

hvis $a_{1,1} \neq 0$

$$\left.\begin{array}{lllllllll} l_{2,1} & := & \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & a^{(1)}_{2,p} & := & a_{2,p} - l_{2,1}a_{1,p} & b^{(1)}_2 & := & b_2 - l_{2,1}b_1 \\ l_{3,1} & := & \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} & a^{(1)}_{3,p} & := & a_{3,p} - l_{3,1}a_{1,p} & b^{(1)}_3 & := & b_3 - l_{3,1}b_1 \\ \vdots & & & & & & & & \\ l_{n,1} & := & \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} & a^{(1)}_{n,p} & := & a_{n,p} - l_{n,1}a_{1,p} & b^{(1)}_n & := & b_n - l_{n,1}b_1 \end{array}\right\} p = 2, \ldots, n.$$

Nå setter vi

$$A := A^{(1)}, b := b^{(1)}$$

og vi fortsetter med

$$Ax = b \to A^{(2)}x = b^{(2)}.$$

Hvis $a_{2,2} \neq 0$, får vi, for $j = 3, \ldots, n$,

$$l_{j,2} := \frac{a_{j,2}}{a_{2,2}} \quad a^{(2)}_{j,p} := a_{j,p} - l_{j,2}a_{2,p} \quad b^{(2)}_j := b_j - l_{j,2}b_2 \quad p = 3, \ldots, n,$$

og vi setter

$$A := A^{(2)}, b := b^{(2)}.$$

Generelt for $A^{(k)}$ har vi,

$$A := A^{(k-1)}, b := b^{(k-1)}$$

og

$$Ax = b \to A^{(k)}x = b^{(k)}$$

med, for $j = k+1, \ldots n$, hvis $a_{k,k} \neq 0$

$$l_{j,k} := \frac{a_{j,k}}{a_{k,k}} \quad a^{(k)}_{j,p} := a_{j,p} - l_{j,k}a_{k,p} \quad b^{(k)}_j := b_j - l_{j,k}b_k \quad p = k+1, \ldots, n.$$

Til slutt får vi den følgende algoritmen:

Gauss eliminasjon

For $k = 1, \ldots, n-1$

For $j = k+1, \ldots, n$

$l_{j,k} := \frac{a_{j,k}}{a_{k,k}}$

For $p = k+1, \ldots, n+1$,

$a_{j,p} := a_{j,p} - l_{j,k} a_{k,p}$

End

End

End

2.3 Gauss eliminasjon med partiell pivotering

I Gauss eliminasjon (G-E), som beskrevet i den generell algoritme, må vi alltid dividere for elementet $a_{k,k}$ (pivot elementet). Selv sagt får vi problemer når dette er enten null eller veldig liten i absoluttverdi. Man kan unngå slike problemer ved å bytte ligningene av systemet med hverandre. Prosedyren heter partiell pivotering.

2.4 To eksempler: Gauss eliminasjon med partiell pivotering

La oss ta det følgende systemet:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &=& 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &=& 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &=& 1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \tag{8}$$

Først "eliminere" vi den 1. kolonnen ved å subtrahere den 1. ligningen fra de følgende tre. Og får vi

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 1 \\ x_3 - 2x_4 &=& 0 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 &=& 0 \\ -2x_2 - 2x_4 &=& 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right] \tag{9}$$

nå er det umulig å fortsette fordi i lineære kombinasjon av den 2. ligningen med den 3. det fins ikke noen parameter α som vi kan bruke for å eliminere variabelen x_2

$$(x_2 - 2x_3 - 2x_4) - \alpha \cdot (x_3 - 2x_4) = 0.$$

Det eneste som kan gjøres er a bytte ligninene. Av hensyn til avrundingsfeil er det lurt å bytte den 2. ligningen med denne som har størst koeffisient (i absoluttverdi) for x_2, d.v.s. den 3. Så får vi

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 1 \\ -2x_2 - 2x_4 &=& 0 \\ x_2 - 2x_3 - 2x_4 &=& 0 \\ x_3 - 2x_4 &=& 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \tag{10}$$

og nå kan vi fortsette med Gauss eliminasjonen som vanlig. Og vi får:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 1 \\ -2x_2 - 2x_4 &=& 0 \\ -2x_3 - 3x_4 &=& 0 \\ x_3 - 2x_4 &=& 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \tag{11}$$

og til slutt:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 1 \\ -2x_2 - 2x_4 &=& 0 \\ -2x_3 - 3x_4 &=& 0 \\ -\frac{7}{2}x_4 &=& 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{array}\right] \tag{12}$$

som med insettingsalgoritmen gir løsning

$$x = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

I den andre eksempel gitt:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &=& 5 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &=& 3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 6 \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{13}$$

vi vil redusere det i triangulær formen ved å bruke Gauss-eliminasjon med partiell pivotering.

Først bytter vi ligninger:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &=& 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &=& 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &=& 6 \end{array} \tag{14}$$

så eliminerer vi x_1 fra den første kolonnen,

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &=& 3 \\ 3.5x_2 + 3x_3 &=& 3.5 \\ 4.5x_2 + 2x_3 &=& 4.5 \end{array} \tag{15}$$

da bytter vi ligningene en gang til:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &=& 3 \\ 4.5x_2 + 2x_3 &=& 4.5 \\ 3.5x_2 + 3x_3 &=& 3.5 \end{array} \tag{16}$$

og eliminere x_2 fra den siste ligningen,

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &=& 3 \\ 4.5x_2 + 2x_3 &=& 4.5 \\ 1.4444x_3 &=& 0 \end{array} \tag{17}$$

med innsettingalgoritme for vi løsningen $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$.

2.5 G-E med partiell pivotering: generell algoritme

Generelt man får den følgende algoritme for Gauss eliminasjon med partiell pivotering: først initialiserer man vektoren π (pivot vektor) slik at $\pi_i := i$ for $i = 1, \ldots n$,

Gauss eliminasjon med partiell pivotering

For $k = 1, \ldots, n-1$

$a := |a_{k,k}|$

  For $j = k+1, \ldots, n$

    if ($a < |a_{j,k}|$)

      $a := |a_{j,k}|$

      $\pi_k := j$

    End

  End

  if ($\pi_k \neq k$)

    $s := \pi_k$

    For $p = k, \ldots, n$

      $r := a_{k,p}$

      $a_{k,p} := a_{s,p}$

      $a_{s,p} := r$

    End

  End

  For $j = k+1, \ldots, n$

    $l_{j,k} := \frac{a_{j,k}}{a_{k,k}}$

    For $p = k+1, \ldots, n+1$,

      $a_{j,p} := a_{j,p} - l_{j,k} a_{k,p}$

    End

  End

End

2.6 Kompleksitet av Gauss-eliminasjon

Man kan bevise at for en $n \times n$ matrise er kompleksitet av Gauss eliminasjon er

$$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n,$$

operasjoner (addisjoner og multiplikasjoner). For store n er det $\frac{1}{3}n^3$ som dominerer. Vi sier at Gauss-eliminasjon har kompleksitet $\mathcal{O}(n^3)$. Insettingsalgoritmen (beskrevet med (3)) er billigere, $\mathcal{O}(n^2)$.