

# MA2501, Vårsemestre 2019, Numeriske metoder for lineære systemer

## 1 Introduksjon

Vi vil approksimere løsningen av lineære systemet av  $n$  ligningene og  $n$  ukjente:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

hvor  $(x_1, \dots, x_n)$  er de ukjente. Gitt  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , og  $b_i, i = 1, \dots, n$ .

Vi kan skrive (1) i matrise form ved å definere:

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

så skriver vi (1) i følgende måte:

$$A \cdot x = b. \tag{2}$$

Lineære systemer kan løses veldig enkelt når  $A$  har en spesiell form, for eksempel når  $A$  er en diagonal matrise eller en triangulærmatrix og  $a_{i,i} \neq 0$  for  $i = 1, \dots, n$ :

- $A$  diagonalmatrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 & = & b_1 & x_1 & = & \frac{b_1}{a_{1,1}} \\ a_{2,2}x_2 & = & b_2 & x_2 & = & \frac{b_2}{a_{2,2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,n}x_n & = & b_n & x_n & = & \frac{b_n}{a_{n,n}} \end{array}$$

- $A$  triangulærmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \cdots + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1,j}x_j}{a_{1,1}} \\ x_2 & = & \frac{b_2 - \sum_{j=3}^n a_{2,j}x_j}{a_{2,2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n & = & \frac{b_n}{a_{n,n}} \end{array} \quad (3)$$

Formlene (3) kalles innsettingsalgoritmen.

## 2 Løsning av lineære systemer ved iterasjon

For å approksimere  $x$ , løsningen til  $Ax = b$ , gitt  $x^{(0)}$ , vil vi konstruere en følge av vektorer  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots$  som konvergerer mot  $x$ . En måte å gjøre det på er å bruke fikspunkt iterasjon.

Vi vil forsøke å finne ekvivalente formuleringer av  $Ax = b$  som fiks-punkt ligning. For eksempel:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = (I - A)x + b$$

hvor  $I$  er  $n \times n$  identitets matrise. Gitt  $x^{(0)}$ , fører dette til iterasjonen:

$$x^{(n+1)} = (I - A)x^{(n)} + b.$$

Generelt, kan man lage en iterasjon som følge:

- skriv  $A$  som en summe av to ledd:  $A = M - N$ , velg  $M$  inverterbar;
- fra  $(M - N)x = b$  man får  $Mx = Nx + b$  og

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b;$$

- så gitt  $x^{(0)}$  får man:

$$x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b.$$

Vanligvis  $M$  er valgt slik at  $M^{-1}$  er lett å beregne, for eksempel kan  $M$  være diagonal eller triangulær.

### 2.1 Eksempel

Vi skal løse ved fikspunktiterasjon systemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned} \quad A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

og starte med

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Løsningen er

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi tar

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad N = M - A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har  $Mx = Nx + b$ , og  $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ , d.v.s.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ved å bruke verdier av  $x^{(0)}$  beregner vi

$$x^{(1)} = M^{-1}Nx^{(0)} + M^{-1}b,$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi fortsetter  $x^{(2)} = M^{-1}Nx^{(1)} + M^{-1}b$ :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

og videre

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2500 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7500 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1250 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(6)} \\ x_2^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8750 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(28)} \\ x_2^{(28)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -0.0000 \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Eksempel

I systemet (4) tar vi nå

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad N = M - A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

og med den samme  $x^{(0)}$  beregner vi  $x^{(1)} = M^{-1}Nx^{(0)} + M^{-1}b$ :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

og får vi eksakt løsningen i den 1. iterasjonen.

Generelt tar vi  $M$  lik diagonalen til  $A$ , d.v.s

$$m_{i,i} = a_{i,i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad m_{i,j} = 0, \quad i \neq j,$$

(hvor  $m_{i,j}$  er elementene til  $M$ , og  $a_{i,j}$  er elementene til  $A$ ), så har vi en iterasjon metode som heter **Jacobi metode**.

Når tar vi  $M$  lik den lavere triangulære delen av  $A$ , d.v.s.

$$m_{i,j} = a_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, i, \quad m_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = i+1, \dots, n,$$

så får vi en iterasjon metode som heter **Gauss-Seidel metode**.

Se på de generelle formlene til Jacobi's og Gauss-Seidel's metoder i bok *Finite difference schemes and partial differential equations* av John C. Strikwerda, ch. 13.

## 2.3 Konvergens

For å se hvor nær  $x^{(n)}$  er til  $x$  må vi bruke et norm:  $\|x - x^{(n)}\|$ .

Hvis  $u$  er en vektor med  $n$  komponenter, eksempler av normer av  $u$  er:

- $\|u\|_1 := |u_1| + \dots + |u_n|$ , norm-1;
- $\|u\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$ , max-norm;
- $\|u\|_2 := (|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (u^T u)^{\frac{1}{2}}$ , norm-2.

I konvergensanalyse bruker vi også matrise-norm. Eksempler av matrise-norm til en matrise  $U$  (med elementer  $u_{i,j}$ ) er:

- $\|U\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{i,j}^2}$ , Frobenius norm;
- $\|U\|_\infty := \max_i \sum_{j=1}^n |u_{i,j}|$  max-norm;
- $\|U\|_1 := \max_j \sum_{i=1}^n |u_{i,j}|$  norm-1.

For eksemper kan vi beregne norm av

$$U := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

vi har

$$\begin{aligned} \|U\|_F &= \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} = 3.74165738677394, \\ \|U\|_\infty &= \max\{|3| + |2|, |-1| + |0|\} = 5, \\ \|U\|_1 &= \max\{|3| + |-1|, |2| + |0|\} = 4. \end{aligned}$$

Se bok av Süli og Mayers (kap. 2.7) for mer informasjon om normer og matrisenormer.

For å analysere konvergens, skriver vi iterasjonsmetoden som følge

$$x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b,$$

og ved å definere  $C := M^{-1}N$  og  $g := M^{-1}b$  kan vi skrive:

$$x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + g, \quad (5)$$

$C$  er **iterasjonsmatrisa** til metoden og man kan bevise følgende teorem.

**Theorem 1** Hvis det fins et norm  $\|\cdot\|$  slik at  $\|C\| < 1$  da konvergerer iterasjonen (5) for alle  $x^{(0)}$ .

## 2.4 Eksempel:(andvendelsen av Teorem 1)

La oss ta

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

da har vi at

$$C_J = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -0.3333 \\ 0.4000 & 0 \end{bmatrix}$$

og  $\|C_J\|_F = 0.5207$ ,  $\|C_J\|_1 = \|C_J\|_\infty = 0.4000$ , dermed, gitt  $f$ , konvergerer Jacobi metode for  $Bx = f$  for hver  $x^{(0)}$ .

For Gauss-Seidel metode har vi

$$C_{GS} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3333 \\ 0 & -0.1333 \end{bmatrix}$$

og  $\|C_{GS}\|_F = 0.3590$ ,  $\|C_{GS}\|_1 = 0.4667$  og  $\|C_{GS}\|_\infty = 0.3333$ , dermed konvergerer Gauss-Seidel metode for  $Bx = f$  for hver  $x^{(0)}$ .

## 2.5 Eksempel (tilfellet hvor Teorem 1 ikke kan brukes)

La oss ta matrisen fra eksempel (4):

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

vi har verifisert at både Jacobi og Gauss-Seidel konvergerer. For Jacobi metode har vi:

$$C_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

med normer  $\|C_J\|_F \geq 1$   $\|C_J\|_{\max} \geq 1$   $\|C_J\|_1 \geq 1$ . For Gauss-Seidel har vi

$$C_{GS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

og  $\|C_{GS}\|_F \geq 1$   $\|C_{GS}\|_{\infty} \geq 1$   $\|C_{GS}\|_1 \geq 1$ .

Her hypotesene av forrige teorem er ikke oppfylt, selv om vi vet fra numeriske beregninger at iterasjonene konvergerer. Vi må bruke en annen teknikk hvis vi vil analysere konvergens.

Husk at et tall reell eller kompleks  $\lambda$  slik at det fins  $u$  vektoren slik at

$$Cu = \lambda u$$

kalles egenverdi av  $C$  og  $u$  kalles egenvektor. La  $\sigma(C)$  være mengden av alle egenverdier av  $C$  (det fins ikke mer enn  $n$  distinkte egenverdier for en  $n \times n$  matrise), så kan man definere

$$\rho(C) := \max_{\lambda \in \sigma(C)} |\lambda|$$

$\rho(C)$  heter spektral radius av  $C$  og det er en positivt tall som brukes mye for å estimere konvergens av iterasjonsmetoder i lineære systemer. Hvis vi tegner en sirkel av radius  $\rho(C)$  i det komplekse planet, sirkelen innholder alle egenverdier til  $C$ .

Man kan bevise:

**Theorem 2** *Iterasjonsmetode (5) konvergerer, uansett valg av  $x^{(0)}$ , hvis og bare vis  $\rho(C) < 1$ .*

I eksemplet våre skal vi finne egenverdier til  $C_J$  og  $C_{GS}$ . Merk at

$$Cu = \lambda u \Leftrightarrow (C - \lambda I)u = 0 \Leftrightarrow \det(C - \lambda I) = 0,$$

hvor  $I$  er identitetmatrisen og

$$\det(U) = \det \left( \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{bmatrix} \right) = u_{1,1} \cdot u_{2,2} - u_{1,2} \cdot u_{2,1}.$$

Så har vi at

$$\det(C_J - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - \frac{1}{2},$$

og vi har  $\lambda_{1,2}^J = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.7071$ . Så  $\rho(C) = 0.7071$  og dermed  $\rho(C) < 1$ .

For  $C_{GS}$  har vi

$$\det(C_J - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda \left( \frac{1}{2} - \lambda \right),$$

og vi har  $\lambda_1^{GS} = 0$  og  $\lambda_2^{GS} = \frac{1}{2}$  og  $\rho(C_{GS}) = \frac{1}{2}$ .

Grunnen til at Gauss-Seidel metode konvergerer raskere enn Jacobi metode er at  $\rho(C_{GS}) < \rho(C_J)$ .