Name:

Matrikelnummer: Studienkennzahl:

---

3. Klausur Numerische Mathematik

13. Dezember 2011

1. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine positiv definite, hermitesche Matrix mit Cholesky-Zerlegung $A = LL^*$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{cond}_2(L^*) \cdot \mathrm{cond}_2(L) = \big(\mathrm{cond}_2(L)\big)^2 = \mathrm{cond}_2(A)\ .$$

2. Führen Sie jeweils zwei Schritte des Gesamtschritt- und des Einzelschrittverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Startwert $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ durch.

3. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mittels LR-Zerlegung und Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution.

4. Sei $\hat{x}$ eine doppelte Nullstelle der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte $f''(\hat{x}) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Iteration

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

lokal quadratisch gegen $\hat{x}$ konvergiert.