

Name:

---

Matrikelnummer:

Studienkennzahl:

---

## 2. Klausur Numerische Mathematik

19. Oktober 2010

1. Bestimmen Sie eine Näherung der Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 &= 16, \\xy^2 &= 4,\end{aligned}$$

indem Sie einen Schritt des Newtonverfahrens mit Startwert  $(x_0, y_0) = (2, 2)$  durchführen.

2. Wir betrachten das Verfahren

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{i,i}} \left( b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} \right)$$

zur Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$ . Dabei ist  $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix,  $b = (b_i)_i \in \mathbb{R}^n$  ein Spaltenvektor, und  $\omega \in (0, 1)$  ein fix gewählter Parameter.

Zeigen Sie: Ist  $A$  strikt diagonal dominant, dann konvergiert dieses Verfahren für jeden Startwert  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  gegen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$ .

3. Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \cos(\pi x) + x^3 + x^2 - 2x + 1,$$

besitzt eine Nullstelle bei  $\hat{x} = 1$ . Geben Sie ein möglichst großes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  an, sodass für alle  $a \in I$  die zu

$$\Phi_a(x) = x \quad \text{mit} \quad \Phi_a(x) := x + af(x)$$

gehörende Fixpunktiteration  $x_{n+1} := \Phi_a(x_n)$  lokal gegen  $\hat{x}$  konvergiert.

4. Versuchen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1000 & 1000 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

einmal mittels LR-Zerlegung ohne Spaltenpivotsuche und einmal mittels LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche zu lösen. Runden Sie dabei nach jedem Rechenschritt auf zwei signifikante Stellen.