

Name:

1. Klausur Numerische Mathematik

09. Februar 2013

1. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Cholesky-Zerlegung und anschließender Vorwärts- beziehungsweise Rückwärtssubstitution.

Ist die Matrix dieses Gleichungssystems positiv definit?

2. Führen Sie zwei Schritte des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Startwert $x^{(0)} = 0$ durch. Zeigen Sie weiters, dass die Iterierten gegen die Lösung der Gleichung konvergieren, und schätzen Sie den Fehler nach dem zehnten Schritt ab, ohne die Lösung der Gleichung zu bestimmen.

3. Bestimmen Sie die ersten drei Iterierten des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$x + y = 4, \quad xy = 1,$$

mit Startwerten $x^{(0)} = 1$ und $y^{(0)} = 0$.

4. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 2^t$, und sei p_m für $m \in \mathbb{N}$ das Interpolationspolynom vom Grad m an die Funktion f in äquidistanten Punkten im Intervall $[0, 4]$.

- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_4 mit den Knoten $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Zeigen Sie, dass die Folge der Interpolationspolynome p_m für $m \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $[0, 4]$ gegen f konvergiert.