Name:

Matrikelnummer: Studienkennzahl:

1. Klausur Numerische Mathematik

29. Juni 2011

1. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   mithilfe der **Cholesky-Zerlegung** und Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution.

2. Finden Sie das Minimum $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ der reellwertigen Funktion

$$f(x,y) = -\ln(xy) + x(y-1)^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{y}{2} \,.$$

   Lösen Sie dazu die Optimalitätsbedingung

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   indem Sie **zwei Schritte des Newtonverfahrens** mit Startwert $(x_0, y_0) = (1, 1)$ durchführen.

3. Betrachten Sie das implizite Eulerverfahren

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \,. \tag{1}$$

   Zeigen Sie, dass eine Fixpunktiteration zur Lösung der Gleichung (1) konvergiert, sofern für ein $L > 0$ die Funktion f die Lipschitz-Bedingung

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z| \qquad \text{für alle } y,\, z \in \mathbb{R}^d \text{ und } t \geq 0$$

   erfüllt und die Schrittweite h kleiner als $1/L$ gewählt ist. Geben Sie weiters eine Funktion f an, für die die Fixpunktiteration bei der Wahl $h = 1/L$ divergiert.

4. Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad der Quadraturformel

$$Q[f] = \frac{b-a}{3}\big(2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)\big) \,,$$

   wobei

$$x_1 = \frac{3a+b}{4} \,, \qquad x_2 = \frac{a+b}{2} \,, \qquad x_3 = \frac{a+3b}{4} \,.$$