LØSNINGSFORSLAG
MA2401/MA6401 VÅR 2019

Oppgave 1

i. Euklidsk geometri

ii. Nøytral geometri

iii. Hyperbolsk geometri

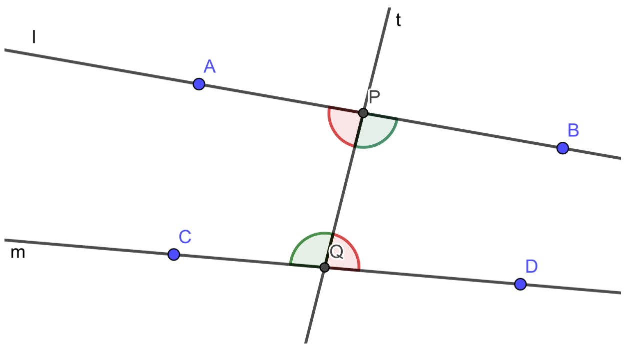
iv. Nøytral geometri

v. Hyperbolsk geometri

Oppgave 2

a) Ytre vinkel teoremet (YVT) sier at vinkelmålet til en ytre vinkel i en trekant er større enn vinkelmålet til hver av de indre vinklene i de to andre hjørnene. Mer spesifikt, dersom vi har en trekant $\triangle ABC$ og et punkt D velges på $\overleftrightarrow{AB}$ slik at $A * B * D$, så gir YVT at $\mu(\angle CBD) > \mu(\angle CAB)$ og $\mu(\angle CBD) > \mu(\angle ACB)$.

Anta at to linjer l og m skjæres av en tredje linje t (en transversal) i to ulike punkt. Altså, $l \cap t = \{P\}$ og $m \cap l = \{Q\}$ der $Q \neq P$. Velg punkter A og B på l slik at $A * P * B$ og C, D på m slik at $C * Q * D$ Da kalles $\angle APQ$ og $\angle PQD$ et alternerende par av indre vinkler. Tilsvarende så er $\angle BPQ$ og $\angle CQP$ et alternerende par av indre vinkler.



Alternerende indre vinkel teoremet (AIVT) sier at dersom et alternerende par av indre vinkler er kongruente, så er l og m parallelle.

b) Vi skal vise AIVT ved å bruke YVT. La linjene l, m, t og punktene A, B, C, D, P og Q være som i forrige deloppgave. Anta at $\angle CQP \cong \angle BPQ$. Vi må vise at da er $l || m$. Anta nå at det eksisterer et punkt S som ligger både på l og m (RAA). S må være i en av de to halvplanene dannet av t (planseparasjonspostulatet). Dersom D ligger på samme side av t som B, så vil $\angle CQP$ være en ytre vinkel til $\triangle PQS$. Samtidig er $\angle BPQ$ en indre vinkel på motsatt side. Ettersom vinklene er antatt å være kongruente, motsier dette YVT. Hvis S ligger på samme side av t som A, vil $\angle BPQ$ være en ytre vinkel og $\triangle PQS$ en indre vinkel på motsatt side i $\triangle PQS$. Igjen så får vi en motsigelse av YVT. Dermed må vi forkaste RAA hypotesen og konkludere med at $l || m$.

Oppgave 3

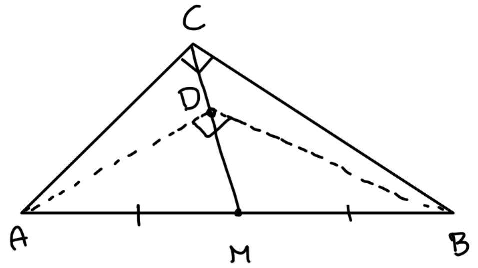
a) *Kommentar:* Siden oppgaven ber oss om å vise motsatt retning av Pytagoras' teorem, så kan vi anta at Pytagoras' teorem er kjent. Vi er i euklidsk geometri, så alle teoremer fra nøytral geometri kan antas å være kjent. Dermed kan vi bruke SSS (side-side-side kongruensbetingelsen).

Bevis: Anta at vi har en trekant $\triangle ABC$ slik at $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Vi skal vise at $\angle ACB$ er en rettvinkel. La D og E være to ulike punkt på en linje slik at $DE = AC$. Konstruer en normal til linjen ved D. La F være et punkt på normalen slik at $DF = BC$. Av Pytagoras' teorem vet vi da at $EF^2 = DE^2 + DF^2$, så $EF^2 = DE^2 + DF^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$ (av antagelsen). Av SSS får vi at $\triangle DEF \cong \triangle CAB$, så $\mu(\angle ACB) = \mu(\angle EDF) = 90$.

b) Vi skal vise at alle rettvinklede trekanter har en omsirkel (en sirkel slik at alle hjørnene i trekanten ligger på sirkelen). Dette kan vises på (minst) to måter. Den ene måten er å bruke resultatet som sier at en trekant har en omsirkel hvis de tre midtnormalene til sidene i trekanten krysser i et felles punkt, og vise at dette alltid må holde i euklidsk geometri (se bevis av teorem 8.2.4 i læreboka). Eller så kan man anta at det er kjent at dersom $MC = AM = MB$ i en trekant $\triangle ABC$ hvor M er midtpunktet på $\overline{AB}$, så er $\angle ACB$ rettvinklet, og løse oppgaven på følgende vis:

La $\triangle ABC$ være en trekant med rettvinkel $\angle ACB$. La M være midtpunktet på AB. Konstruer en sirkel $\gamma = \mathcal{C}(M, AM)$ med sentrum i M og radius AM. Vi har at både A og B ligger på γ (radius$= AM = MB$). Det gjenstår å vise at C ligger på γ. Dersom $CM = AM$ er dette tilfellet. La D være punktet på $\overrightarrow{MC}$ slik at $MD = AM$. Vi må vise at $D = C$. Anta at $D \neq C$. Da har vi enten $M * D * C$ eller $M * C * D$.

Anta nå at $M * D * C$. Ettersom $MD = AM = MB$, så vil $\angle ADB$ være rettvinklet. $\angle ADM$ er en ytre vinkel til $\triangle ADC$ og $\angle MDB$ en ytre vinkel til $\triangle BDC$. Av YVT følger det da at $\mu(\angle ADM) > \mu(\angle ACM)$ og $\mu(\angle BDM) > \mu(\angle BCM)$. Da får vi $90 = \mu(\angle ACB) = \mu(\angle ACM) + \mu(\angle MCB) < \mu(\angle ADM) + \mu(\angle BDM) = \mu(\angle ADB)$. Dette gir oss en motsigelse. Tilfellet $M * C * D$ vises på tilsvarende måte. Dermed kan vi konkludere med at $MD = MC$ og at også C ligger på γ.



Oppgave 4

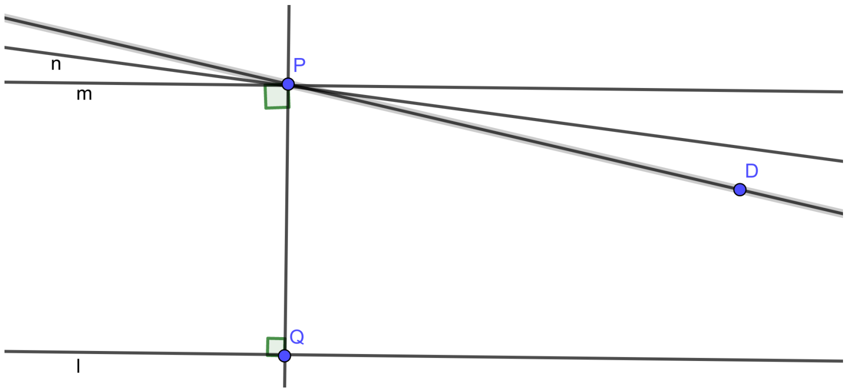
Vi skal vise at SVS følger av VSV og de andre aksiomene i nøytral geometri. Anta at $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter hvor $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ og $\angle CAB \cong \angle FDE$ (de har lik side-vinkel-side). Vi må vise at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Dersom $\angle ABC \cong \angle DEF$, så er trekantene kongruente (lik VSV). Anta at det ikke er tilfelle. Da må den ene vinkelen være større enn den andre. Gi evt. hjørnene nye navn slik at $\mu(\angle ABC) > \mu(\angle DEF)$. Det eksisterer en stråle $\overrightarrow{CQ}$ slik at $\mu(\angle ACQ) = \mu(\angle DEF)$ og slik at Q ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AC}$ som B (gradskive/vinkelmålspostulatet). Denne strålen ligger mellom $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$ (mellomliggenhet for stråler). Av tverrliggerteoremet finnes det da et punkt $G \in \overrightarrow{BQ}$ som ligger i det indre av $\overline{AC}$. Det følger at $AC = AG + GC > AG$ ($GC > 0$ følger av linjalpostulatet). Samtidig vil $\triangle AQC \cong \triangle DEF$

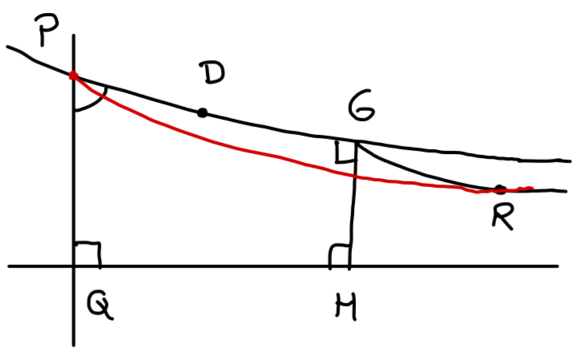
(VSV), som gir $AG = DF = DC$. Dette er en motsigelse, så vi kan konkludere at $\angle ABC \cong \angle DEF$. Dermed må $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Oppgave 5

a) La P, Q, D og l være som gitt i oppgaven. Konstruer en normal m til $\overleftrightarrow{PQ}$ ved P. Av AIVT vet vi da at $m||l$. Det eksisterer en annen linje n (ikke lik m) slik at P ligger på n og $n||l$ (det hyperbolske parallellpostulatet). Linjen n kan ikke være normal til $\overleftrightarrow{PQ}$ og dermed må vinkelen mellom $\overleftrightarrow{PQ}$ og n måle mindre enn 90 grader på en av sidene av $\overleftrightarrow{PQ}$. Den minste vinkelen $\angle QPD$ slik at $\overleftrightarrow{PD}||l$ kan ikke være større enn denne. Dermed må $\angle QPD$ måle mindre enn 90 grader.



b) Anta at P, D, Q og l er som beskrevet i oppgaven. Vi skal vise at $\overleftrightarrow{PD}$ og l ikke har en fellesnormal. Fellesnormalen må være på en av sidene av $\overleftrightarrow{PQ}$. Anta at det eksisterer en fellesnormal som krysser l i et punkt E og $\overleftrightarrow{PD}$ i et punkt F på motsatt side av $\overleftrightarrow{PQ}$ som D. Da får vi en firkant $\square PQEF$ med vinkelsum større enn 360 grader, som ikke kan stemme. Så en eventuell fellesnormal må krysse $\overleftrightarrow{PD}$ og l på samme side av $\overleftrightarrow{PQ}$ som D. Anta at det er tilfelle og at den krysser l i punktet H og $\overleftrightarrow{PD}$ i G. Fra a) må det da eksistere en stråle $\overrightarrow{GR}$ slik at $\overrightarrow{GR}||l$ og slik at $\angle HGR$ måler mindre enn 90 grader. Siden $\angle QPD$ er den minste vinkelen slik at $\overleftrightarrow{QP}||l$, må strålen $\overrightarrow{PR}$ krysse l, men det betyr at $\overrightarrow{GR}$ også må krysse l. Dermed har vi en motsigelse og kan konkludere med at det eksisterer ingen fellesnormal.



c) Husk at en trekant har en omsirkel hvis og bare hvis midtnormalene til de tre sidene krysser i et felles punkt.

Vi tar igjen utgangspunkt i konstruksjonen gitt i oppgaven (se figur). Fra a) vet vi at $\mu(\angle QPD) <$ 90 grader. La A være et punkt på $\overleftrightarrow{PQ}$ slik at $PQ = QA$. Trekk en normal fra A ned på $\overleftrightarrow{PD}$. Kall fotpunktet R. R må ligge på samme side av $\overleftrightarrow{PD}$ som D. Hadde R vært på den andre siden, ville $\angle APR$ og $\angle QPD$ dannet et lineært par, og dermed ville $\angle APR$ målt mer enn 90 grader. Da ville vi hatt en trekant $\triangle APR$ med vinkelsum større enn 180 grader (som er en motsigelse). Videre har vi at $P \neq R$ siden $\angle APD$ måler mindre enn 90 grader og $\angle ARD$ måler 90 grader.

La B være et punkt på $\overrightarrow{AR}$ slik at $AR = RB$. Da er l og $\overleftrightarrow{PD}$ midtnormaler til to av sidene i trekanten $\triangle PAB$ Siden $\overleftrightarrow{PD} || l$ kan ikke midtnormalene krysse og dermed eksisterer det ikke en omsirkel til $\triangle PAB$.