Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG
MA2401/MA6401 HØST 2019

Oppgave 1

i. Hyperbolsk geometri

ii. Nøytral geometri

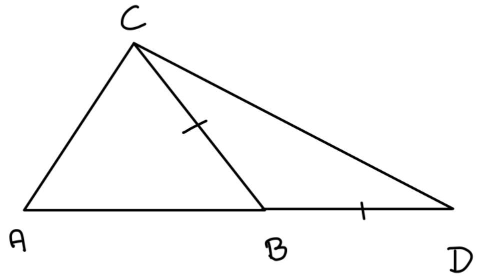
iii. Euklidsk geometri

iv. Euklidsk geometri (det var et generøst hint i oppg. 4a)

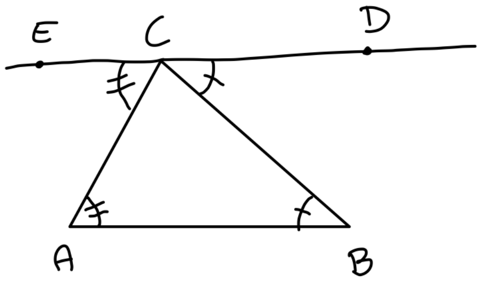
v. Nøytral geometri

Oppgave 2

a) Vi skal vise trekantulikheten. La $\triangle ABC$ være en trekant. La D være et punkt på $\overrightarrow{AB}$ slik at $A{*}B{*}D$ og $BD = BC$ (linjalpostulatet). Siden $A{*}B{*}D$, ligger B i det indre av vinkelen $\angle ACD$. Av gradskivepostulatet følger det at $\mu(\angle ACD) > \mu(\angle BCD)$. $\triangle CBD$ er en likebeint trekant. Av likebeint-trekant-teoremet har vi da at $\mu(\angle BCD) = \mu(\angle BDC)$, så $\mu(\angle ACD) > \mu(\angle BDC)$. Av scalene-ulikheten brukt på $\triangle ACD$ får vi $AD > AC$. Vi har $AD = AB + BD = AB + BC$, så da følger $AB + BC > AC$.



b) La $\triangle ABC$ være en trekant og anta at EPP holder. Vi skal vise at $\sigma(\triangle ABC) = 180$ grader. Velg et punkt D på motsatt side av $\overleftrightarrow{BC}$ som A slik at $\angle BCD \cong \angle ABC$ (gradskivepostulatet). Da vet vi fra AIV teoremet at $\overleftrightarrow{AB} || \overleftrightarrow{CD}$. Linjen $\overleftrightarrow{AC}$ er nå en transversal som krysser $\overleftrightarrow{CD}$ i C og $\overleftrightarrow{AB}$ i A. Velg et punkt E på $\overleftrightarrow{CD}$ slik at $E * C * D$. Ettersom $\overleftrightarrow{AB} || \overleftrightarrow{CD}$ følger det da av det motsatte av AIV teoremet (MAIVT) at $\angle ECD \cong \angle CAB$ (her har vi brukt at MAIVT $\Leftrightarrow$ EPP). Strålene $\overrightarrow{CE}$ og $\overrightarrow{CD}$ er motsatte stråler. Fra lineært-par-teoremet (og gradskivepostulatet) har vi da at $180 = \mu(\angle ECA) + \mu(\angle ACB) + \mu(\angle BCD) \Leftrightarrow 180 = \mu(\angle CAB) + \mu(\angle ACB) + \mu(\angle CBA) \Leftrightarrow 180 = \sigma(\triangle ABC)$.



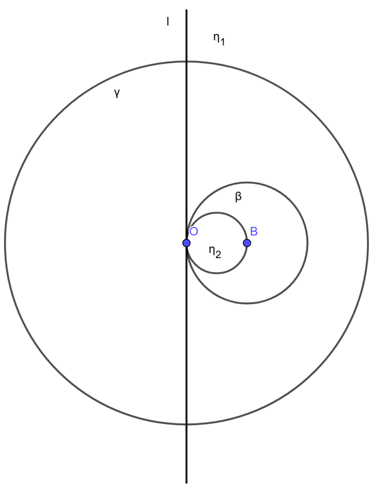
Oppgave 3

a) La $P \neq O$ være et punkt. Da er inversjonen av P i γ, $P' = I_{O,3}(P)$, det punktet P' på $\overrightarrow{OP}$ slik at $OP \cdot OP' = 3^2$. Videre har vi at $I_{O,3}(O) = \infty$ og $I_{O,3}(\infty) = O$.

Sentrum O til sirkelen $\gamma = C(O,3)$ ligger på linjen l. Da kan man se fra definisjonen av $I_{O,3}$ at $I_{O,3}\big(l \cup \{\infty\}\big) = l \cup \{\infty\}$. Inversjonen av l i γ blir da alle punkt på l utenom O, inkludert ∞, altså $I_{O,3}(l) = \big(l \cup \{\infty\}\big) \setminus \{O\}$.

b) La B være sentrum i sirkelen β, og la $I_{B,1}$ være inversjonen i β. Vi har at $B \notin l$ og $I_{B,1}(\infty) = B$. Videre vil $I_{B,1}(O) = O$ ettersom $O \in \beta$. Fra egeneskapene til inversjon i en sirkel, vet vi da at $I_{B,1}\big(l \cup \{\infty\}\big)$ må være en sirkel, kall den ξ, med diameter $\overline{OB}$ av lengde 1.

Dermed vil $\eta_2 = I_{B,1}\big(l\big) = \xi \setminus \{B\}$, altså sirkelen ξ minus punktet B.



Oppgave 4

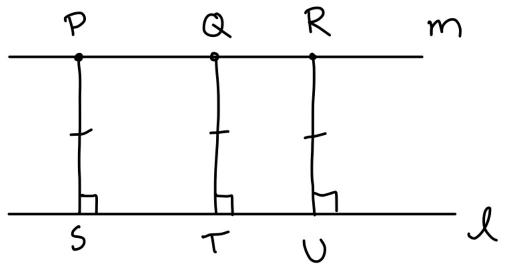
a) La $\square ABCD$ være en Saccheri-firkant i euklidsk geometri med bunnlinje $\overline{AB}$ og topplinje $\overline{CD}$. Av definisjon har vi $DA = BC$ og $\mu(\angle DAB) = \mu(\angle ABC) = 90$. Fra egenskapene til Saccheri-firkanter, vet vi at $\overline{AB} || \overline{CD}$ og $\angle ADC \cong \angle BCD$. Konstruer en normal m til $\overleftrightarrow{AD}$ ved D. Da følger det av AIVT at $m || \overleftrightarrow{AB}$. Ettersom m er den unike linjen slik at $m || \overleftrightarrow{AB}$ og $D \in m$ (EPP), må $m = \overleftrightarrow{CD}$. Dermed må $\mu(\angle ADC) = 90$ og siden toppvinklene er kongruente, følger det at $\square ABCD$ er et rektangel.

b) La $\square ABCD$ være en Saccheri-firkant i hyperbolsk geometri med bunnlinje $\overline{AB}$ og topplinje $\overline{CD}$. Av definisjon er da $DA = BC$ og $\mu(\angle DAB) = \mu(\angle ABC) = 90$ grader. Videre så har man at

- $CD > AB$,

- $\square ABCD$ er et parallellogram,
- toppvinklene $\angle ADC$ og $\angle BCD$ er kongruente og spisse,
- $\overline{MN}$, hvor M er midtpunktet på $\overline{AB}$ og N er midtpunktet på $\overline{CD}$, står normalt på både $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$,
- $MN < BC$ og $MN < AD$.

La l og m være to ulike linjer slik at $m||l$. Anta at det eksisterer tre ulike punkt på m som er i samme avstand d fra l (RAA). Kall punktene for P, Q og R. Uten tap av generalitet, kan vi anta $P * Q * R$. Ettersom $m||l$, ligger de tre punktene på samme side av l. Trekk normaler fra P, Q og R ned på l. Kall fotpunktene S, T og U. Siden $PS = QT = RU$ (hypotese), er både $\square STQP$ og $\square TURQ$ Saccheri-firkanter. Dermed må toppvinklene $\angle PQT$ og $\angle TQR$ begge være spisse. Men $\angle PQT$ og $\angle TQR$ er supplementærvinkler (lineært-par-teoremet), så det kan ikke være tilfelle. Dermed må vi forkaste RAA hypotesen og konkludere med at det eksisterer maksimalt to ulike punkt på m i en avstand d fra l.

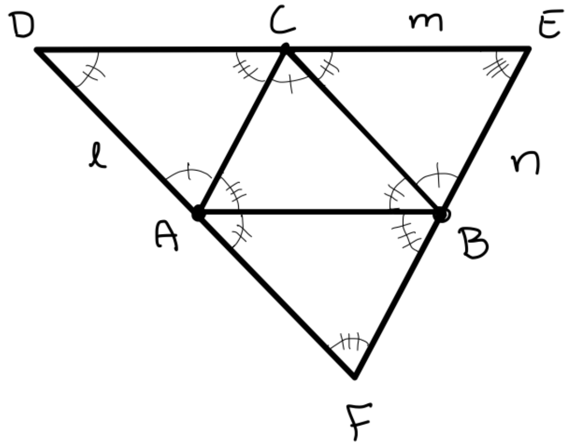


Oppgave 5

a) La $\triangle ABC$ være en trekant. La m være en linje slik at C ligger på m og $m||\overleftrightarrow{AB}$, l en linje slik at $A \in l$ og $l||\overleftrightarrow{BC}$, og n en linje slik at $B \in n$ og $n||\overleftrightarrow{AC}$. Linjene m og l krysser i et punkt D. Hadde de ikke krysset, ville $m||l$ som hadde medført $\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{CB}$ (transitivitet av parallellitet), som ikke kan være tilfellet. Tilsvarende må l og n, og n og m, krysse. Kall krysningspunktene hhv. F og E.

Linjene $\overleftrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{CB}$ er transversaler til m og $\overleftrightarrow{AB}$. Siden $m||\overleftrightarrow{AB}$ vet vi fra det motsatte av det alternerende-indre-vinkel teorem (MAIVT) at vinkelen mellom m og $\overrightarrow{CA}$ er kongruent med $\angle CAB$. Tilsvarende finner vi at vinkelen mellom l og $\overleftrightarrow{AC}$ er kongruent med $\angle ACB$. Summen av to vinkler i en trekant måler strengt mindre enn 180 grader. Dermed følger det (i euklidsk geometri) at D må være på motsatt side av $\overleftrightarrow{AC}$ som B (og tilsvarende for E og F).

Så, ved gjentatt bruk av MAIVT, $\angle DCA \cong \angle CAB$ og $\angle ECB \cong ABC$, $\angle DAC \cong \angle ACB$, $\angle FAB \cong \angle ABC$, $\angle CBE \cong \angle BCA$ og $\angle FBA \cong \angle BAC$ (se figur). I tillegg så er vinkelsummen i enhver trekant 180 grader i euklidsk geometri, og dermed må $\angle FDE = \angle ADC \cong \angle ABC$, $\angle DEF \cong \angle CAB$ og $\angle DFE \cong \angle ACB$. Vi kan med det konkludere at $\triangle ABC \sim \triangle EDF$.



b) La $\triangle ABC$ være en trekant, og m, l og n de tre linjene som går gjennom hhv. C, A og B og er parallelle med de motstående sidene i $\triangle ABC$.

Vi har to tilfeller. Ettersom parallellitetsvinkelen i hyperbolsk geometri måler mindre enn 90 grader, trenger ikke m, l og n å danne en trekant i det hele tatt (se figur til venstre). Dersom de ikke danner en trekant, gir det ingen mening å sjekke formlikhet.

Vi antar nå at m, l og n danner en trekant $\triangle DEF$ hvor m og l møtes i D, l og n i F og m og n i E (figur til høyre). Vi viser at vinkelsummene i de to trekantene oppfyller $\sigma(\triangle ABC) < \sigma(\triangle DEF)$, og dermed kan ikke de to trekantene være formlike. Vi finner at

$$\sigma(\triangle DEF) = \sigma(\triangle ADC) + \sigma(\triangle ABC) + \sigma(\triangle CBE) + \sigma(\triangle ABF) - 3 \cdot 180,$$

hvor det siste leddet kommer fra tre ganger lineært par-teoremet og gradskivepostulatet (en gang i hvert hjørne A, B og C). I hyperbolsk geometri er vinkelsummen i enhver trekant strengt mindre enn 180 grader, så $\sigma(\triangle ADC) < 180$, $\sigma(\triangle CBE) < 180$ og $\sigma(\triangle ABF) < 180$. Bruker vi dette i ulikheten ovenfor så får vi

$$\sigma(\triangle DEF) > \sigma(\triangle ABC).$$