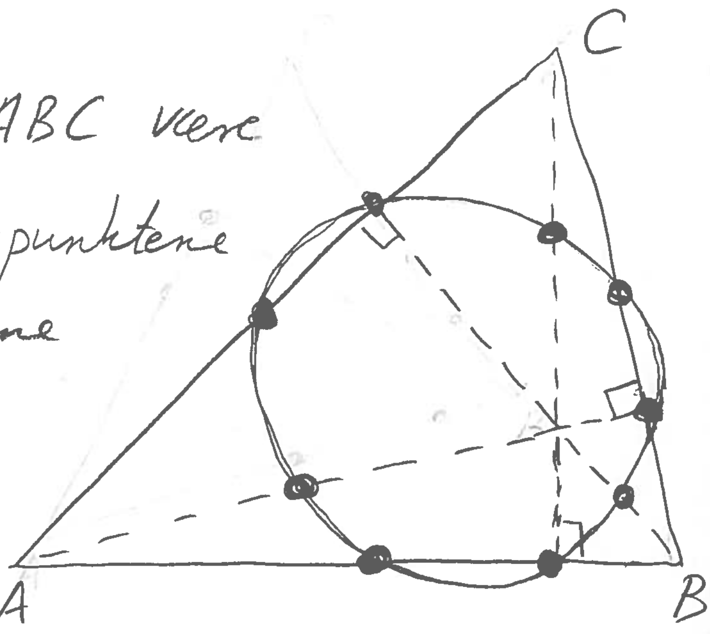
Kontinuasjonseksamen i MA2401: Geometri August 2018. Løsningsforslag.

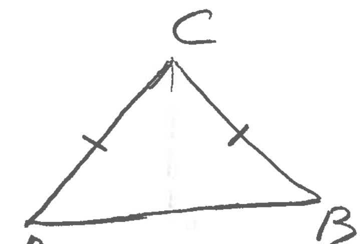
Oppgave 1

La $\triangle ABC$ være en trekant. Midtpunktene til sidene, fotpunktene til høydene og midtpunktene til segmentene som forbinder ortosentret med de tre hjørnene ligger alle på en sirkel.



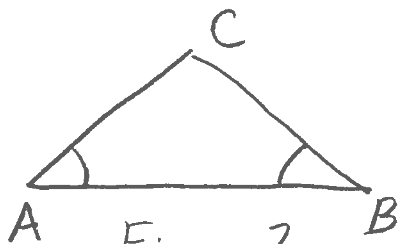
Oppgave 2

a) Anta først $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Da er $\triangle ACB \cong \triangle BCA$ ifølge (SAS), se Figur 1. Da er $\angle BAC \cong \angle ABC$.



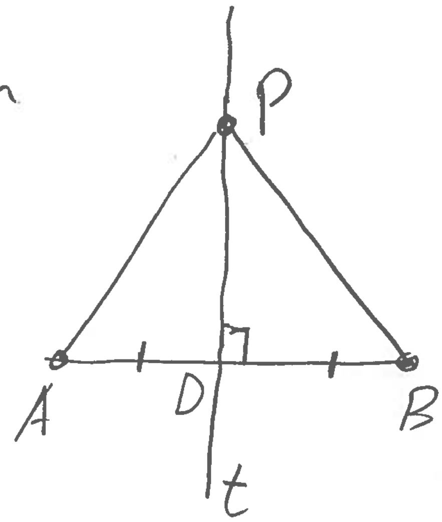
Figur 1

Anta så $\angle BAC \cong \angle ABC$. Da er $\triangle CAB \cong \triangle CBA$ ifølge (ASA), se Figur 2. Da er $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.



Figur 2

b) La t være midtnormalen til $\overline{AB}$, og la D være midtpunktet til $\overline{AB}$. Anta først $P \in t$. Da er $\triangle ADP \cong \triangle BDP$ ifølge (SAS), se Figur. Da er $\overline{AP} \cong \overline{BP}$.



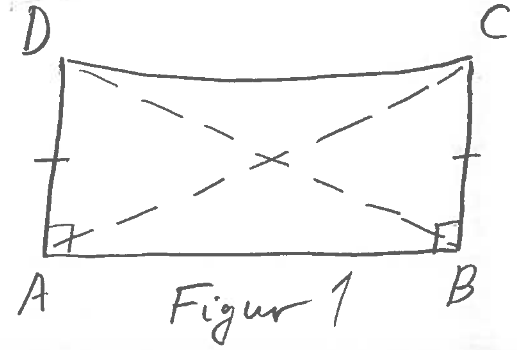
Figur.

Anta så at $\overline{AP} \cong \overline{BP}$. Ifølge a) så er $\angle DAP \cong \angle DBP$. Da er $\triangle DAP \cong \triangle DBP$ ifølge (SAS). Da er $\angle ADP \cong \angle BDP$. Siden $\angle ADP$ og $\angle BDP$ er et lineært par, så er $\angle ADP$ en rett vinkel, og følgelig ligger P på t.

Oppgave 3

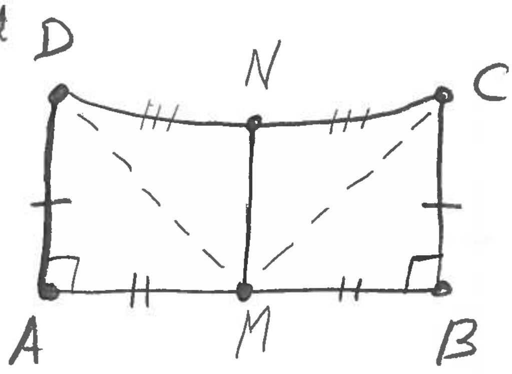
a) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ ifølge (SAS), se Figur 1. Da er $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

b) $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ ifølge (SSS) siden vi ifølge a) har at $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, se Figur 1. Da er $\angle BCD \cong \angle ADC$.



Figur 1

c) La M være midtpunktet på $\overline{AB}$ og N midtpunktet på $\overline{CD}$, se Figur 2.

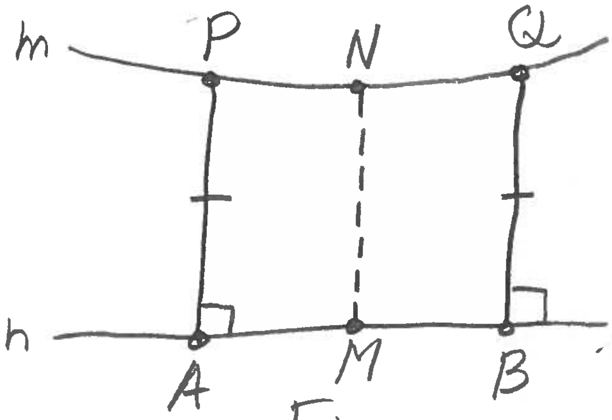


Figur 2.

$\triangle AMD \cong \triangle BMC$ ifølge (SAS). Da er $\overline{DM} \cong \overline{CM}$. Da er $\triangle DMN \cong \triangle CMN$ ifølge (SSS). Spesielt er $\angle MND \cong \angle MNC$. og siden $\angle MND$ og $\angle MNC$ er et lineært par så er $\angle MNC$ en rett vinkel. Det viser at $\overline{MN} \perp \overline{CD}$.

$\triangle BCN \cong \triangle ADN$ ifølge (SAS), siden vi ifølge b) har at $\angle BCN \cong \angle ADN$. Spesielt er $\overline{AN} \cong \overline{BN}$. Da gir (SSS) at $\triangle AMN \cong \triangle BMN$, og da er spesielt $\angle AMN \cong \angle BMN$. Siden $\angle AMN$ og $\angle BMN$ er et lineært par så er $\angle AMN$ en rett vinkel. Det viser at $\overline{MN} \perp \overline{AB}$.

Oppgave 4

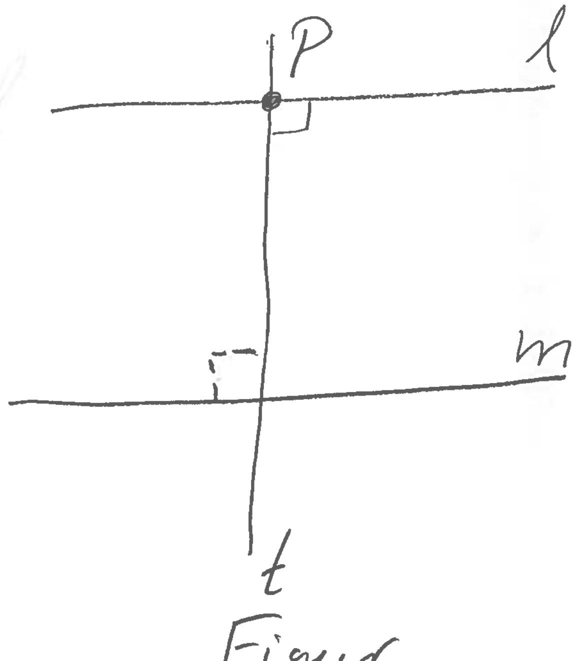


Figur.

Ifølge hypotese er $d(P,n) = d(Q,n)$, der d betegner avstand. La A (hhv. B) være fotpunktet til normalen fra P (hhv. Q) til n.
La M være midtpunktet av $\overline{AB}$ og la N være midtpunktet til $\overline{PQ}$, se Figur.
Siden $\square ABQP$ er en Saccheri firkant så er $t \perp m$ og $t \perp n$, der $t = \overleftrightarrow{MN}$, ifølge 3c).

Oppgave 5

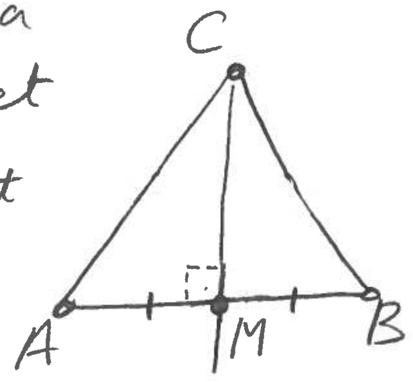
a) La $P \in l$, og la t være linjen gjennom P slik at $t \perp l$.



Figur.

Det er klart at t må skjære m, ellers ville $t \parallel m$. Det strider mot at det finnes kun en parallell til m gjennom P.
Da er t en transversal til l og m. Ifølge MAIV så vil $t \perp m$, se Figur.

b) Nok å vise at medianene og midtnormalene til trekanten ΔABC er de samme. La M være midtpunktet til $\overline{AB}$. Vi viser at medianen $\overleftrightarrow{CM}$ er midtnormalen til $\overline{AB}$. (Beviset for at de andre medianene er midtnormaler er identisk.) Siden $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ så så ligger C på midtnormalen til $\overline{AB}$ ifølge 2b), se Figur.

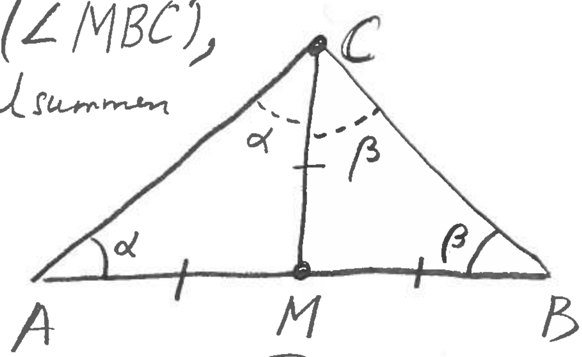


Figur.

Altså faller medianen og midtnormalen sammen.

Oppgave 6

Ifølge 2 a) så er den stiplede vinkelen α lik $\alpha = \mu(\angle MAC)$, og den stiplede β lik $\beta = \mu(\angle MBC)$, se Figur. Siden vinkelsummen til ΔABC er 180, så vil $90 = \alpha + \beta = \mu(\angle ACB)$.



Figur.