MA2401/MA6401 Geometri 2017-08-19

Løsning

Oppgave 1

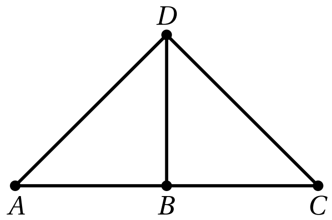
De udefinerte begrepene i insidensgeometri er *punkt*, *linje* og relasjonen *ligger på*. (Et punkt *ligger på* en linje, eller det gjør ikke det.)

Relasjonen *ligger på* omtales iblant som *insidens*, noe som gir opphav til navnet *insidensgeometri*.

Noen eksempler på *definerte* begrep er *parallell* (to linjer er parallelle dersom ikke noe punkt ligger på begge linjene), *kollineær* (om punkter som alle ligger på samme linje) og (*går*) *gjennom* (en linje går gjennom et punkt dersom punktet ligger på linjen).

De to første eksemplene har mer substans, mens det siste mest er et språklig hjelpemiddel.

En vanlig måte å spesifisere en modell i insidensgeometri på, er å la *punktene* være en vilkårlig mengde, for eksempel bokstavene A–D, og *linjene* være visse mengder av punkter. Så definerer vi at et punkt x ligger på en linje ℓ dersom $x \in \ell$. Firepunktsmodellen i figuren har en linje $\{A, B, C\}$ som går gjennom tre punkt, mens de øvrige linjene er $\{A, D\}$, $\{B, D\}$ og $\{C, D\}$.

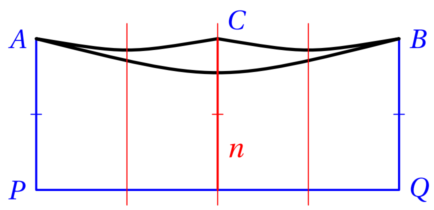


Litt ettertanke viser at dette er den eneste modellen som tilfredsstiller kravene til oppgaven – *opp til isomorfi*, som matematikere liker å si, men det ble ikke spurt om denne entydigheten.

Oppgave 2

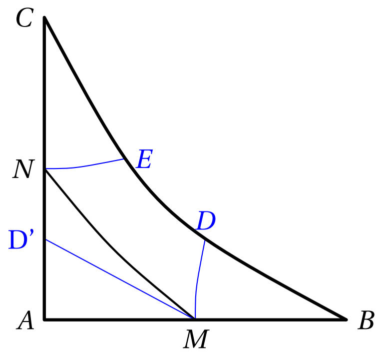
a. La $\triangle ABC$ være en trekant. La a være midtnormalen på $\overline{BC}$, og b være midtnormalen på $\overline{AC}$. Dersom $a \parallel b$, så er også $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ eller $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AC}$. (Dette er teorem 5.1.7 på side 108 i læreboken.) Men dette kan ikke være tilfelle, fordi $\overleftrightarrow{BC}$ og $\overleftrightarrow{AC}$ møtes bare i ett punkt (C). Derfor er $a \nparallel b$, så det finnes et felles punkt P på a og b. Fordi a er midtnormal på $\overline{BC}$, er $PB = PC$. Og fordi b er midtnormal på $\overline{AC}$, er $PA = PC$. Sirkelen med sentrum i P og radius $PA = PB = PC$ er dermed en omskrevet sirkel for $\triangle ABC$.

b. Start med en Saccheri-firkant $\square PQBA$ med grunnlinje $\overline{PQ}$ og topplinje $\overline{BA}$. Da har $\overline{PQ}$ og $\overline{BA}$ en felles midtnormal, som vi kaller n. Velg C på n på samme side av $\overleftrightarrow{PQ}$ som A og B slik at avstanden fra C til $\overleftrightarrow{PQ}$ er lik PA (og QB). Da er $\triangle ABC$ en trekant uten noen omskrevet sirkel, fordi midtnormalene på de tre sidene (røde i figuren) alle er normaler til $\overleftrightarrow{PQ}$, og derfor innbyrdes parallelle.



(Løsningene fortsetter på neste side.)

Oppgave 3

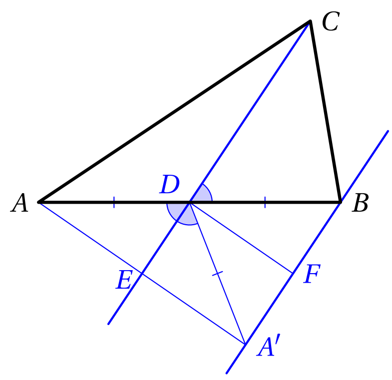


a. Defekten til en trekant er $\delta(\triangle ABC) = 180° - \sigma(\triangle ABC)$, der $\sigma(\triangle ABC)$ er vinkelsummen i trekanten. To gangers bruk av et teorem om additivitet av defekt gir $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle AMC) + \delta(\triangle MBC) = \delta(\triangle AMN) + \delta(\triangle NMC) + \delta(\triangle MBC)$, og fordi enhver trekant i hyperbolsk geometri har positiv defekt, følger at $\delta(\triangle ABC) > \delta(\triangle AMN)$. Fordi begge trekantene er likebente, er $\angle ACB \cong \angle ABC$ og $\angle ANM \cong \angle AMN$, så $\delta(\triangle ABC) = 90° - 2\mu(\angle ABC)$ og $\delta(\triangle AMN) = 90° - 2\mu(\angle AMN)$. Ulikheten $\delta(\triangle ABC) > \delta(\triangle AMN)$ gir derfor $\mu(\angle ABC) < \mu(\angle AMN)$.

b. Midtnormalen til $\overline{AB}$ skjærer jo $\overline{AB}$, så den må skjære en side til i $\triangle ABC$, eller gå gjennom C (Pasch's aksiom) – åpenbart går den ikke gjennom A eller B. Men $\overleftrightarrow{MD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, fordi de to linjene har en fellesnormal $\overleftrightarrow{AB}$. Derfor må det andre skjæringspunktet ligge i siden $\overline{BC}$.

c. Fordi $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, finnes et punkt D' på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ som C slik at $\triangle AMD' \cong \triangle MBD$. Fordi $\angle MAD' \cong \angle BMD \cong \angle BAC$ (de er rette vinkler), ligger D' på $\overrightarrow{AC}$. Og fordi $\mu(\angle MBD) = \mu(\angle ABC) < \mu(\angle AMN)$, er $\overrightarrow{MD'}$ en indre stråle i $\angle AMN$. Ved tverrliggerteoremet skjærer denne $\overline{AN}$. Skjæringspunktet må være D', så $A * D' * N$. Det følger at $MD = AD' < AN$.

Oppgave 4



a. La E være fotpunktet av normalen fra A til $\overleftrightarrow{DC}$. Vi finner $C * D * E$, for hvis ikke, vil ikke $\triangle ADE$ oppfylle YVT (siden $\angle ADE$ blir stump, i så fall, og den ytre vinkelen ved E er rett). Dermed ligger E, og derfor også A', på motsatt side av $\overleftrightarrow{AB}$ fra C. Spesielt er $\angle BDC$ og $\angle ADE$ toppvinkler, så de er kongruente. Videre er $\angle A'DE \cong \angle ADE$ fordi speiling er vinkelbevarende, så $\angle A'DE \cong \angle BDC$. Tilsvarende er $\overline{A'D} \cong \overline{DA} \cong \overline{DB}$, så $\triangle A'DB$ er likebent. Om F er midtpunktet på $\overline{A'B}$, så er da $\angle A'DF \cong \angle BDF$. Ved vinkeladdisjonsteoremet er dermed $\angle FDE \cong \angle FDC$. Siden disse to vinklene er nabovinkler, må de være rette. Dermed er $\overleftrightarrow{DF}$ en fellesnormal til $\overleftrightarrow{DC}$ og $\overleftrightarrow{A'B}$, så de to linjene er parallelle. (Eller de er samme linje, men $B \notin \overleftrightarrow{DC}$, så det er ikke tilfelle.)

b. Fordi $\overleftrightarrow{A'B} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, ligger A' og B på samme side av $\overleftrightarrow{DC}$. Det gjenstår å vise at A' og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$. I motsatt fall må enten A' ligge på $\overrightarrow{CB}$ – men da er $C \in \overleftrightarrow{A'B}$, som er umulig – eller så må A' være et indre punkt i *toppvinkelen* til $\angle ABC$ (fordi A' og C ligger på motsatte sider av $\overleftrightarrow{AB}$). Men i det siste tilfellet vil strålen motsatt $\overrightarrow{BA'}$ ligge i det indre av $\angle DBC$, og så vil tverrliggerteoremet gi at denne strålen skjærer $\overline{CD}$ – igjen en umulighet, fordi $\overleftrightarrow{A'B} \parallel \overleftrightarrow{DC}$.

Til sist: Fordi speiling bevarer vinkler, er $\angle ACD \cong \angle A'CD$. Fordi A' er et indre punkt i $\angle BCD$, gir da vinkeladdisjonsteoremet at $\mu(\angle ACD) = \mu(\angle A'CD) < \mu(\angle BCD)$.