MA2401/MA6401 Geometri 2017-05-29

Løsning

Oppgave 1

Utsagnene (*ii*), (*iii*) og (*v*) er sanne, mens (*i*) og (*iv*) er gale.

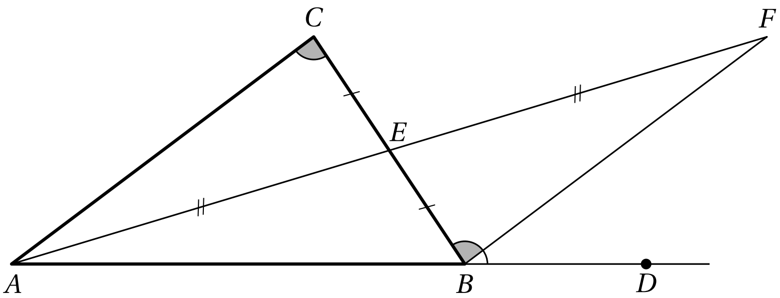
Oppgave 2

Plassér et punkt E' på $\overleftrightarrow{BD}$ slik at $D * B * E'$. Da er $\angle DBC$ og $\angle ABE'$ toppvinkler, og derfor kongruente. Dermed er også $\angle ABE' \cong \angle ABE$. Men E' og E ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ (fordi begge er motsatt D), og entydighetsdelen i vinkelkonstruksjonspostulatet sier da at $\overrightarrow{BE'} = \overrightarrow{BE}$. Spesielt er da $E \in \overleftrightarrow{BE'} = \overleftrightarrow{DB}$. Og siden D og E ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{AB}$, er da også $D * B * E$.

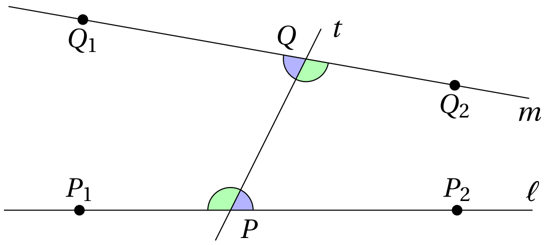
Oppgave 3

a. YVT sier at vinkelmålet til en ytre vinkel i en trekant er større enn vinkelmålet til hver av de indre vinklene i de to andre hjørnene. Mer presist, om $\triangle ABC$ er gitt, og D velges på den forlengede siden $\overleftrightarrow{AB}$ slik at $A * B * D$, sier YVT at $\mu(\angle CBD) > \mu(\angle BCA)$. (Tilsvarende for de andre ytre vinklene, med tilsvarende indre vinkler, alltid ved et annet hjørne.)

Bevis: La E være midtpunktet på $\overline{BC}$, og velg $F \in \overrightarrow{AE}$ slik at $AF = 2AE$ (punktkonstruksjonspostulatet). Da er $EF = AE$ (linjalpostulatet). Videre er $\angle AEC \cong \angle BEC$ (de er toppvinkler), og dermed er $\triangle AEC \cong \triangle FEB$ (SAS). Spesielt er $\angle FBE \cong \angle ACE$ (definisjon av kongruens for trekanter). Men F er et indre punkt i $\angle CBD$, og dermed blir $\mu(\angle CBD) > \mu(\angle FBE)$ (vinkeladdisjon). Sammen med $\angle FBE \cong \angle ACE$ gir det $\mu(\angle CBD) > \mu(\angle BCA)$.



b. Anta at to forskjellige linjer ℓ og m begge skjæres av en tredje linje t, men ikke i et felles punkt. Spesifikt: $\ell \cap t = \{P\}$, $m \cap t = \{Q\}$ og $P \neq Q$. Velg punkter P_1 og P_2 på ℓ slik at $P_1 * P * P_2$, og Q_1 og Q_2 på m slik at $Q_1 * Q * Q_2$. Disse velges slik at P_1 og Q_1 er på samme side av t. (Dermed er P_2 og Q_2 begge på den andre siden av t.) Da kalles $\angle PQQ_1$, $\angle PQQ_2$, $\angle QPP_1$ og $\angle QPP_2$ indre vinkler. Paret $\angle PQQ_1$, $\angle QPP_2$ (blå i figuren under) kalles at alternerende par av indre vinkler, eller kortere bare alternerende indre vinkler. Det samme gjelder paret $\angle PQQ_2$, $\angle QPP_1$ (grønne i figuren). (De kalles alternerende fordi vinklene i et par ligger på motsatt side av t).



AIVT sier at dersom et alternerende par av indre vinkler er kongruente, så er ℓ og m parallelle. (Vinklene i det ene paret er nabovinkler til vinklene i det andre paret, så hvis ett par er kongruente, er også det andre det.)

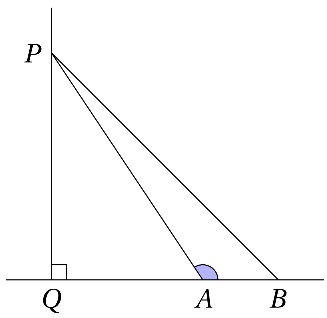
Bevis: Anta det motsatte, altså at ℓ og m ikke er parallelle. Da har de et felles punkt (definisjon av parallellitet), la oss si $\ell \cap m = \{R\}$. Så er en av vinklene $\angle PQQ_1$ og $\angle QPP_2$ en indre vinkel i $\triangle PQR$, mens den andre er en ytre vinkel i et annet hjørne. Ved YVT har den ytre vinkelen større mål enn den indre, så de to vinklene kan ikke være kongruente.

c. OAIVT sier, i samme situasjon som i AIVT, at dersom $\ell \parallel m$, så er alternerende indre vinkler kongruente. Det euklidske parallellaksiomet (EPA) sier at gitt en linje ℓ og et punkt P utenfor ℓ, finnes nøyaktig én parallell til ℓ gjennom P.

Anta at OAIVT holder. La ℓ være en linje, og P et punkt utenfor ℓ. Trekk en normal t fra P til ℓ, og la m være en normal til t i P. Så er $m \parallel \ell$ (AIVT). Anta at n er en parallell til ℓ gjennom P. Så er t en transversal til ℓ og n. Siden $t \perp \ell$, forlanger OAIVT at $t \perp n$. Men det finnes bare én normal til en linje gjennom et punkt, så $n = m$. Dermed finnes nøyaktig én parallell til ℓ gjennom P.

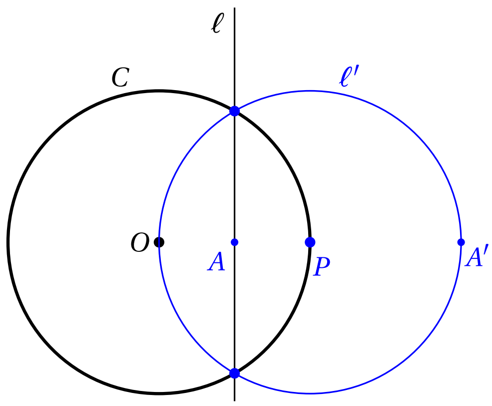
Oppgave 4

Fordi $Q * A * B$, er $\angle PAB$ en ytre vinkel til $\triangle PQA$. YVT impliserer at $\mu(\angle PAB) > \mu(\angle PQA) = 90°$. Dermed er $\angle PAB$ den største vinkelen i $\triangle PAB$, og den søkte ulikheten $PB > PA$ følger av scalene-ulikheten.



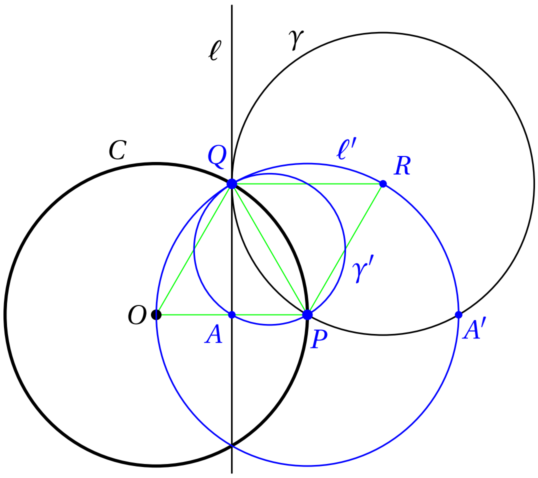
Oppgave 5

a. Inversjonen av $\ell \cup \{\infty\}$ er en sirkel gjennom O, der ∞ avbildes på O. Så inversjonen ℓ' er denne sirkelen med O tatt bort. Punktet A på ℓ nærmest O avbildes til punktet A' på ℓ' lengst bort fra O. Vi skal ha $OA \cdot OA' = 2^2$, og siden $OA = 1$, er $OA' = 4$. $\overline{OA'}$ må være en diameter i ℓ', så radien er 2. Dermed faller sentrum P i ℓ' på C. Skjæringspunktene mellom C og ℓ avbildes på seg selv, så disse to punktene må også ligge på ℓ'.



b. La $Q \in \ell \cap C \cap \gamma$ være punktet der γ tangerer ℓ, og la R være sentrum i γ. Av det vi gjorde i punkt **a**, følger at $\triangle OPQ$ er likesidet (alle sidene har lengde 2). Fordi A er midpunktet på $\overline{OP}$, er $\mu(\angle AQP) = 30°$. Sirkelen γ tangerer ℓ i Q, så $\angle AQR$ er rett. Dermed er $\mu(\angle PQR) = 60°$, og fordi $QR = 2$, er også $\triangle PQR$ likesidet. *Spesielt* går γ gjennom P. Fordi γ tangerer ℓ i Q, må γ' tangere ℓ' i Q. Videre må γ'

inneholde P, fordi γ gjør det, og $P \in C$. Husk at P er sentrum i ℓ': Det følger at QP er en diameter i γ'. Og dermed er også $A \in \gamma'$, fordi $\angle PAQ$ er rett.



Bemerkning til sensuren: Det er mange detaljer i dette bildet, og det vil være helt urimelig å forvente at kandidatene oppdager alle detaljene nevnt ovenfor. Det viktigste poenget er at γ' og ℓ' er sirkler (ℓ' mangler riktignok et punkt O) som tangerer hverandre i Q, og at γ' og γ har felles skjæringspunkter med C. Men at det ene skjæringspunktet er sentrum i ℓ', er nærmest en tilfeldighet som vi ikke kan regne med at noen oppdager.