

Løsning

Oppgave 1

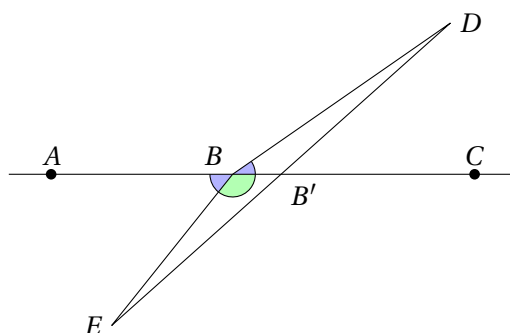
Utsagnene (ii), (iii) og (v) er sanne, mens (i) og (iv) er gale.

Oppgave 2

Plassér et punkt E' på \overleftrightarrow{BD} slik at $D * B * E'$. Da er $\angle DBC$ og $\angle ABE'$ toppvinkler, og derfor kongruente. Dermed er også $\angle ABE' \cong \angle ABE$. Men E' og E ligger på samme side av \overleftrightarrow{AB} (fordi begge er motsatt D), og entydighetsdelen i vinkelkonstruksjonspostulatet sier da at $\overrightarrow{BE'} = \overrightarrow{BE}$. Spesielt er da $E \in \overrightarrow{BE'} = \overrightarrow{DB}$. Og siden D og E ligger på motsatt side av \overleftrightarrow{AB} , er da også $D * B * E$.

ALTERNATIV LØSNING: Vi viser at D , B og E er kollineære. Hvis vi har vist det, følger at $D * B * E$, fordi D og E er på motsatte sider av \overleftrightarrow{AC} , så $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AC} \neq \emptyset$, og skjæringspunktet må være B , fordi to forskjellige linjer ikke har fler enn ett skjæringspunkt.

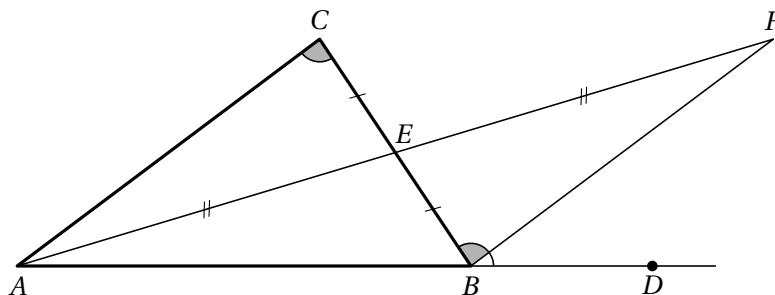
Anta at D , B og E ikke er kollineære. Siden D og E er på motsatte sider av \overleftrightarrow{AC} , finnes et punkt $B' \in \overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AC}$. Vi kan anta at $A * B * B'$. I motsatt fall er $C * B * B'$, og dette tilfellet håndteres på samme måte. Nå blir $\mu(\angle ABE) + \mu(\angle CBE) = 180^\circ$ (nabovinkelteoremet), og fordi $\angle DBC \cong \angle ABE$ (antagelse), er også $\mu(\angle DBC) + \mu(\angle CBE) = 180^\circ$. Men C er et indre punkt i $\angle DBE$, så $\mu(\angle DBE) = \mu(\angle DBC) + \mu(\angle CBE) = 180^\circ$. Dette er en motsigelse, fordi alle vinkelmål er mindre enn 180° ,



Oppgave 3

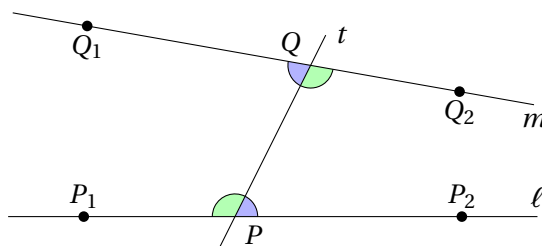
- a. YVT sier at vinkelmålet til en ytre vinkel i en trekant er større enn vinkelmålet til hver av de indre vinklene i de to andre hjørnene. Mer presist, om $\triangle ABC$ er gitt, og D velges på den forlengede siden \overleftrightarrow{AB} slik at $A * B * D$, sier YVT at $\mu(\angle CBD) > \mu(\angle BCA)$. (Tilsvarende for de andre ytre vinklene, med tilsvarende indre vinkler, alltid ved et annet hjørne.)

Bevis: La E være midtpunktet på \overline{BC} , og velg $F \in \overleftrightarrow{AE}$ slik at $AF = 2AE$ (punktkonstruksjonspostulatet). Da er $EF = AE$ (linjalpostulatet). Videre er $\angle AEC \cong \angle BEC$ (de er toppvinkler), og dermed er $\triangle AEC \cong \triangle FEB$ (SAS). Spesielt er $\angle FBE \cong \angle ACE$ (definisjon av kongruens for trekanter). Men F er et indre punkt i $\angle CBD$, og dermed blir $\mu(\angle CBD) > \mu(\angle FBE)$ (vinkeladdisjon, detaljer etter figuren). Sammen med $\angle FBE \cong \angle ACE$ gir det $\mu(\angle CBD) > \mu(\angle BCA)$.



For å rettferdiggjøre bruken av vinkeladdisjon ovenfor, må vi vite at F er et indre punkt i $\angle CBD$, det vil si at (1) F og D ligger på samme side av \overleftrightarrow{BC} , og (2) F og C ligger på samme side av \overleftrightarrow{BD} . (1) gjelder fordi A og F ligger på motsatt side av \overleftrightarrow{BC} , og A og D likeså. (2) gjelder fordi E og F ligger på samme side av \overleftrightarrow{BD} (stråleteoremet), og E og C likeså (stråleteoremet igjen).

- b. Anta at to forskjellige linjer ℓ og m begge skjæres av en tredje linje t , men ikke i et felles punkt. Spesifikt: $\ell \cap t = \{P\}$, $m \cap t = \{Q\}$ og $P \neq Q$. Velg punkter P_1 og P_2 på ℓ slik at $P_1 * P * P_2$, og Q_1 og Q_2 på m slik at $Q_1 * Q * Q_2$. Disse velges slik at P_1 og Q_1 er på samme side av t . (Dermed er P_2 og Q_2 begge på den andre siden av t .) Da kalles $\angle PQQ_1$, $\angle PQQ_2$, $\angle QPP_1$ og $\angle QPP_2$ indre vinkler. Paret $\angle PQQ_1$, $\angle QPP_2$ (blå i figuren) kalles at alternerende par av indre vinkler, eller kortere bare alternerende indre vinkler. Det samme gjelder paret $\angle PQQ_2$, $\angle QPP_1$ (grønne i figuren). (De kalles alternerende fordi vinklene i et par ligger på motsatt side av t).



AIVT sier at dersom et alternerende par av indre vinkler er kongruente, så er ℓ og m parallelle. (Vinklene i det ene paret er nabovinkler til vinklene i det andre paret, så hvis ett par er kongruente, er også det andre det.)

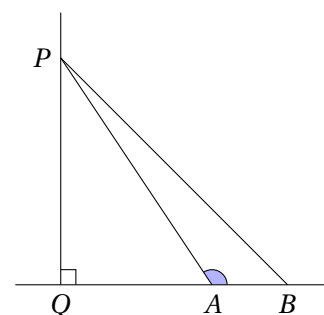
Bevis: Anta det motsatte, altså at ℓ og m ikke er parallelle. Da har de et felles punkt (definisjon av parallellitet), la oss si $\ell \cap m = \{R\}$. Så er en av vinklene $\angle PQQ_1$ og $\angle QPP_2$ en indre vinkel i $\triangle PQR$, mens den andre er en ytre vinkel i et annet hjørne. Ved YVT har den ytre vinkelen større mål enn den indre, så de to vinklene kan ikke være kongruente.

- c. OAIVT sier, i samme situasjon som i AIVT, at dersom $\ell \parallel m$, så er alternerende indre vinkler kongruente. Det euklidske parallellaksiomet (EPA) sier at gitt en linje ℓ og et punkt P utenfor ℓ , finnes nøyaktig én parallell til ℓ gjennom P .

Anta at OAIVT holder. La ℓ være en linje, og P et punkt utenfor ℓ . Trekk en normal t fra P til ℓ , og la m være en normal til t i P . Så er $m \parallel \ell$ (AIVT). Anta at n er en parallell til ℓ gjennom P . Så er t en transversal til ℓ og n . Siden $t \perp \ell$, forlanger OAIVT at $t \perp n$. Men det finnes bare én normal til en linje gjennom et punkt, så $n = m$. Dermed finnes nøyaktig én parallell til ℓ gjennom P .

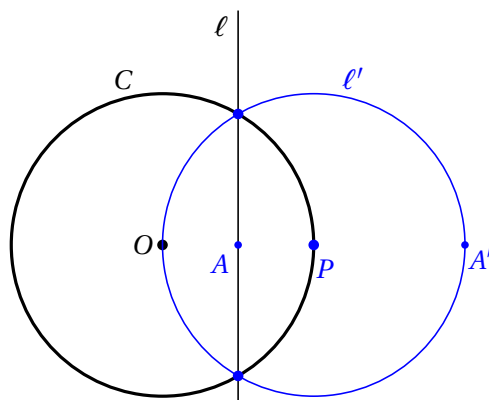
Oppgave 4

Fordi $Q * A * B$, er $\angle PAB$ en ytre vinkel til $\triangle PQA$. YVT impliserer at $\mu(\angle PAB) > \mu(\angle PQA) = 90^\circ$. Dermed er $\angle PAB$ den største vinkelen i $\triangle PAB$, og den søkte ulikheten $PB > PA$ følger av scalene-ulikheten.

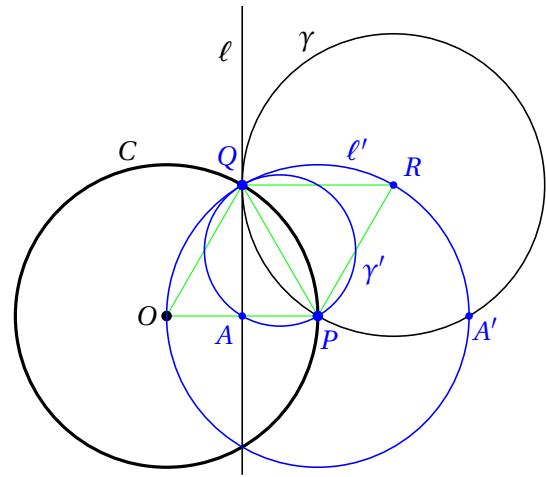


Oppgave 5

- a. Inversjonen av $\ell \cup \{\infty\}$ er en sirkel gjennom O , der ∞ avbildes på O . Så inversjonen ℓ' er denne sirkelen med O tatt bort. Punktet A på ℓ nærmest O avbildes til punktet A' på ℓ' lengst bort fra O . Vi skal ha $OA \cdot OA' = 2^2$, og siden $OA = 1$, er $OA' = 4$. OA' må være en diameter i ℓ' , så radien er 2. Dermed faller sentrum P i ℓ' på C . Skjæringspunktene mellom C og ℓ avbildes på seg selv, så disse to punktene må også ligge på ℓ' .



- b. La $Q \in \ell \cap C \cap \gamma$ være punktet der γ tangerer ℓ , og la R være sentrum i γ . Av det vi gjorde i punkt a, følger at $\triangle OPQ$ er likesidet (alle sidene har lengde 2). Fordi A er midpunktet på \overline{OP} , er $\mu(\angle AQP) = 30^\circ$. Sirkelen γ tangerer ℓ i Q , så $\angle AQR$ er rett. Dermed er $\mu(\angle PQR) = 60^\circ$, og fordi $QR = 2$, er også $\triangle PQR$ likesidet. *Spesielt* går γ gjennom P . Fordi γ tangerer ℓ i Q , må γ' tangere ℓ' i Q . Videre må γ' inneholde P , fordi γ gjør det, og $P \in C$. Husk at P er sentrum i ℓ' : Det følger at QP er en diameter i γ' . Og dermed er også $A \in \gamma'$, fordi $\angle PAQ$ er rett.



Bemerkning til sensuren: Det er mange detaljer i dette bildet, og det vil være helt urimelig å forvente at kandidatene oppdager alle detaljene nevnt ovenfor. Det viktigste poenget er at γ' og ℓ' er sirkler (ℓ' mangler riktignok et punkt O) som tangerer hverandre i Q , og at γ' og γ har felles skjæringspunkter med C . Men at det ene skjæringspunktet er sentrum i ℓ' , er nærmest en tilfeldighet som vi ikke kan regne med at noen oppdager.