MA2401/MA6401 Geometri 2016-08-17

Løsning

Oppgave 1

a. (Vi henviser til læreboken for et svar dette spørsmålet. Vi må forvente, og godta, stor variasjon i hvordan kandidatene besvarer det. Hovedkravet til godkjenning må være at de forklarer at det er snakk om aksiomatiske systemer for plangeometri, der eneste forskjellen ligger i parallell-aksiomet.)

b. (Det er for mange mulige korrekte svar til å skrive opp her.)

Oppgave 2

Antagelsen $L * M * N$ sammen med $M \in m$ gir at L og N ligger på hver sin side av m. Fordi $\ell \parallel m$ og $L \in \ell$, ligger ℓ i sin helhet på samme side av m som L. Tilsvarende ligger n i sin helhet på samme side av m som N. Ettersom ℓ og n dermed ligger på hver sin side av m, kan de ikke ha noen punkter felles, med andre ord er $\ell \parallel n$.

Oppgave 3

a. Hengselsetningen: Dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er trekanter med $AB = DE$, $AC = DF$ og $\mu(\angle BAC) > \mu(\angle EDF)$, er $BC > EF$.

b. SSS: Dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er trekanter med $AB = DE$, $AC = DF$ og $BC = EF$, er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bevis: Ved SAS og antagelsene $AB = DE$ og $AC = DF$ er det nok å vise at $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle EDF)$. Hvis det *ikke* er tilfelle, er enten $\mu(\angle BAC) > \mu(\angle EDF)$ eller $\mu(\angle BAC) < \mu(\angle EDF)$. I det første tilfellet gir hengselsetningen at $BC > EF$, og i det andre tilfellet gir den at $BC < EF$. Begge tilfellene strir mot antagelsen $BC = EF$.

Oppgave 4

Punktet As potens med hensyn på sirkelen er gitt ved produktet av de to avstandene fra A til de to skjæringspunktene mellom sirkelen og en vilkårlig linje gjennom A (så lenge slike skjæringspunkter finnes – et tangeringspunkt regnes her som to sammenfallende skjæringspunkter). I figuren er det to slike linjer, og vi får

$$(x + 2s)x = (a + r)(a - r).$$

Det gir $(x + s)^2 = a^2 - r^2 + s^2$, med løsning

$$x = \sqrt{a^2 - r^2 + s^2} - s.$$

(Den andre løsningen av ligningen er negativ, og må forkastes.)

Med $s = 0$ er $P = Q$, den øverste linjen blir en tangent til sirkelen, og $\angle OPA$ blir rett. Dermed er $x = \sqrt{a^2 - r^2}$ ved Pytagoras, og formelen over stemmer.

Med $s = r$ faller den øverste linjen i figuren sammen med den gjennom sentrum, og $x = a - r$. Dette stemmer også overens med formelen vi fant.

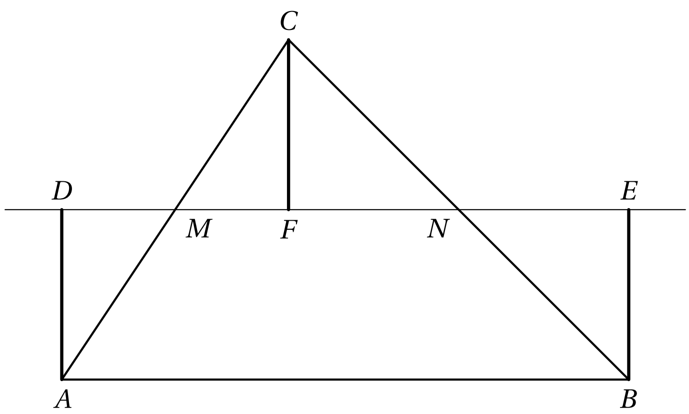
Oppgave 5

Strålen $\overrightarrow{BD}$ skjærer $\overline{AC}$ i et punkt E (tverrliggerteoremet). Ytrevinkelteoremet (YVT) anvendt på $\triangle CDE$ gir $\angle BDC > \angle BEC$. YVT anvendt på $\triangle ABE$ gir $\angle BEC > \angle BAC$. De to ulikhetene gir tilsammen $\angle BDC > \angle BAC$.

Alternativt kan en finne et punkt $F \in \overrightarrow{AD} \cap \overline{BC}$, anvende YVT på $\triangle BAD$ og $\triangle CAD$, og addere ulikhetene $\angle BDF > \angle BAF$ og $\angle CDF > \angle CAF$.

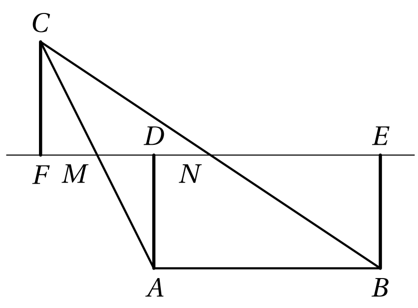
Oppgave 6

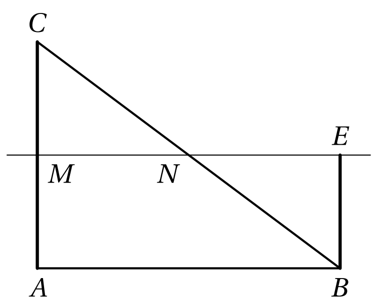
a. Trekk en normal fra C på $\overleftrightarrow{MN}$, og kall fotpunktet F. Dersom $\angle CMN$ og $\angle CNM$ begge er spisse, havner punktene D, M, F, N og E i rekkefølge langs $\overleftrightarrow{MN}$ som vist på figuren under. Nå blir $\angle DMA$ og $\angle FMC$ toppvinkler, og dermed kongruente. Videre er $\overline{MA} \cong \overline{MC}$ fordi M er midtpunktet på $\overline{AC}$, og $\angle ADM$ og $\angle CFM$ er begge rette. Vi kan nå benytte AAS og konkludere at $\triangle ADM \cong \triangle CFM$, og dermed også $\overline{AD} \cong \overline{CF}$. Et tilsvarende argument gir $\overline{BE} \cong \overline{CF}$. Siden kongruens av linjestykker er en transitiv relasjon, er $\overline{AD} \cong \overline{BE}$.



Dersom $\angle CMN$ er stump, blir situasjonen i stedet som i figuren til venstre under. Det samme beviset som over fungerer fortsatt uten endring (hovedpoenget er at vi fortsatt har $D * M * F$, slik at vi igjen har toppvinkler $\angle DMA$ og $\angle FMC$.)

Dersom $\angle CMN$ er rett, blir $D = F = M$, og situasjonen blir som i figuren til høyre. Nå er $\overline{CF} = \overline{CM}$, mens resonnementet brukt tidligere viser at $\overline{CM} \cong \overline{BE}$.



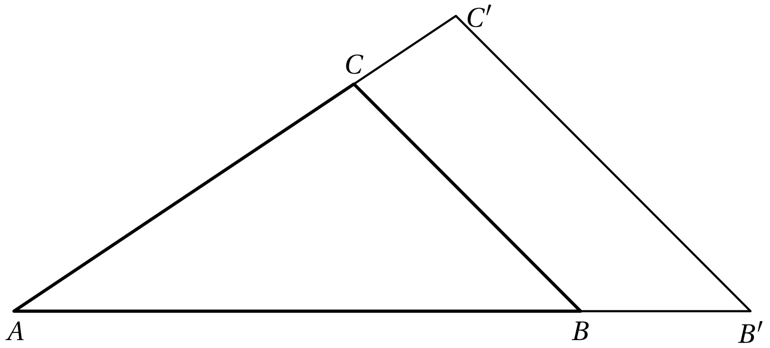


Situasjonen der $\angle CNB$ er stump eller rett, behandles likedan. (Det enkleste er å bytte om A og B og benytte det vi allerede er bevist.)

b. Punkt **a** viser at $\square ABED$ er en Saccheri-firkant, og vi vet at motstående sider i en Saccheri-firkant er parallelle.

Oppgave 7

Velg $B' \in \overrightarrow{AB}$ slik at $AB' = DE$. Da finnes et punkt C' på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ som C slik at $\triangle AB'C' \cong \triangle DEF$. Fordi $\angle BAC \cong \angle EDF \cong \angle B'AC'$, er $C' \in \overrightarrow{AC}$. Og fordi $\angle ABC \cong \angle DEF \cong \angle AB'C'$, er $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Det følger at hele $\overleftrightarrow{B'C'}$, og spesielt C', ligger på samme side av $\overleftrightarrow{BC}$ som C', og derfor motsatt A. Dermed er $A * C * C'$.



Vi finner nå $\delta(\triangle DEF) = \delta(\triangle AB'C') = \delta(\triangle ABC) + \delta(\square BB'C'C) > \delta(\triangle ABC)$, altså $\sigma(\triangle DEF) < \sigma(\triangle ABC)$, og derfor $\mu(\angle EFD) < \mu(\angle BCA)$.

Det er ingen tilfeldighet at beviset har svært mye til felles med beviset for AAA i hyperbolsk geometri. Det kan være verdt å merke seg at AAA er en umiddelbar konsekvens av resultatet vist i dette punktet.