MA2401/MA6401 Geometri 2016-05-24

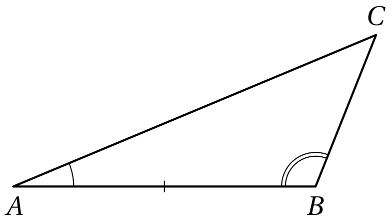
Løsning

Oppgave 1

Oppgaven skulle besvares uten begrnnelse, men her er noen korte begrunnelser – eller hint.

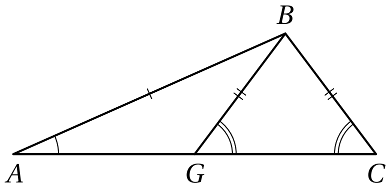
1. **E** I euklidsk geometri er vinkelsummen 180°, så også den tredje vinkelen blir lik. I hyperbolsk geometri er likeformede trekanter kongruente, så om $AB \neq DE$, blir trekantene ikke likeformede.
2. **E** I euklidsk geometri blir $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. I hyperbolsk geometri er det lettest å se at påstanden blir feil dersom $\triangle ABC$ er likesidet. For da gir påstanden at også $\triangle ADE$ er likesidet, så alle vinklene i denne er kongruente. Men den har en felles vinkel med $\triangle ABC$,så $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. Det er umulig fordi likeformede trekanter er kongruente.
3. **E** Transitivitet av parallellitet er ekvivalent med Euklids parallellpostulat.
4. **N** Hvis $P \in m \cap n$ er m og n to forskjellige normaler fra P på ℓ. Det er umulig.
5. **E** Kjent teorem i euklidsk geometri. Det er lett å konstruere et moteksempel i Poincarédisken: La ℓ og n være ortogonale diametre til sirkelen γ, og m en sirkelbue som skjærer γ ortogonalt og ikke møter ℓ eller n.
6. **E** Kjent teorem i euklidsk geometri. En hvilken som helst Saccheri- eller Lambertfirkant er et moteksempel i hyperbolsk geometri.
7. **E** Sant i euklidsk geometri fordi vinkelsummen er 360°. I hyperbolsk geometri er vinkelsummen mindre enn 360°, så det holder ikke. Man kan for eksempel bygge et moteksempel ved å sette sammen en Saccherifirkant og dens speilbilde om grunnlinjen.
8. **N** Vinkelsummen er $\leq 180°$.
9. **N** La de to punktene være P og Q, og ℓ linjen gjennom dem. Den gitte rotasjonen om P kan skrives $\rho_\ell \circ \rho_m$, og den gitte rotasjonen om Q kan skrives $\rho_n \circ \rho_\ell$. Sammensetningen blir $(\rho_n \circ \rho_\ell) \circ (\rho_\ell \circ \rho_m) = \rho_n \circ \rho_m$.
10. **N** Vi ser på $\rho_n \circ \rho_m$: Dersom $n \cap m \neq \emptyset$, har vi en rotasjon om det gitte punktet. Ellers lar vi ℓ være en linje som skjærer både n og m, og ser at $\rho_n \circ \rho_m = (\rho_n \circ \rho_\ell) \circ (\rho_\ell \circ \rho_m)$.

Oppgave 2



a. ASA: Anta to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ tilfredsstiller $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ og $\angle ABC \cong \angle DEF$. Da er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bevis: Plassér et punkt G på $\overrightarrow{BC}$ slik at $BG = EF$. Da er $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (antagelse), $\angle ABG = \angle ABC \cong \angle DEF$ (konstrukjon, antagelse) og $\overline{BG} \cong \overline{EF}$ (konstruksjon), slik at SAS gir $\triangle ABG \cong DEF$. Spesielt er $\angle BAG \cong \angle EDF \cong \angle BAC$ (ASA, antagelse), og det følger at $G \in \overrightarrow{AC}$. Per konstruksjon er også $G \in \overrightarrow{BC}$, så $G = C$ (fordi C er eneste punkt i $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BC}$). Vi har altså $\triangle ABC = \triangle ABG \cong \triangle DEF$.



b. ASS skulle påstå at dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er trekanter med $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\overline{AB} \cong DE$ og $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, så vil $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Figuren viser at dette er feil (med $\triangle DEF = \triangle ABG$).

Men anta nå at de nevnte betingelsene holder, og at at trekantene *ikke* er kongruente.

Da er $AC \neq DF$, for ellers ville trekantene være kongruente ved SAS. Vi antar videre at $AC > DF$. Hvis ikke, bytter vi om de to trekantene først.

Velg nå $G \in \overrightarrow{AC}$ med $AG = DF$. Siden $AG = DF < AC$, er da $A * G * C$.

Nå er $\triangle GBC$ likebent, og det følger at $\angle CGB$ er spiss. Dermed er supplementvinkelen $\angle BGA$ stump, og således den største vinkelen i $\triangle ABG$. Ved «scalene»-ulikheten er derfor $AB > BG$, og altså $AB > BC$.

Dette viser kontrapositivt at dersom $AB < BC$ og betingelsene i ASS holder, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

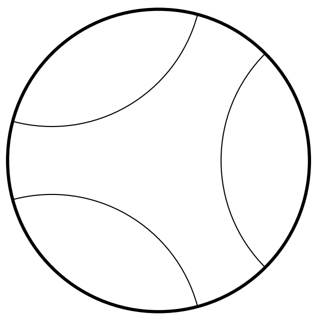
Oppgave 3

a. Trekk en transversal k til en av de tre linjene. Siden vi er i euklidsk geometri, vet vi at k også skjærer de to andre linjene. La skjæringspunktene mellom k og henholdsvis ℓ, m og n hete P, Q og R. Ett av de tre punktene må ligge mellom de to andre på k. Vi kan anta $P * Q * R$. (Hvis ikke, bytt om på de tre linjene så det blir slik.) Fordi $\ell \cap m = \emptyset$, ligger alle punkter i ℓ på samme side av m som P. (I detalj: Dersom $A \in \ell$ er $\overline{AP} \cap m \subseteq \ell \cap m = \emptyset$ fordi $\ell \parallel m$, så A og P ligger på samme side av m.) Tilsvarende ligger alle punkter i n på samme side av m som Q, og siden P og Q ligger på motsatt side av m, er vi ferdig.

b. Punktene i Poincarédisken består av alle punktene på innsiden av en sirkel γ i euklidsk geometri. Linjene er diametere i sirkelen (uten endepunktene) og sirkelbuer som står ortogonalt på γ. Mer presist, om α er en sirkel som er ortogonal på γ, er den delen av α som ligger innenfor γ en linje (Poincarélinje) i Poincarémodellen.

En Poincarélinje av den første typen deler Poincarédisken i to deler, nemlig snittet av Poincarédisken med hvert av de to halvplanene bestemt av linjen som diameteren er en del av.

En Poincarélinje av den andre typen deler også Poincarédisken i to deler: De punktene som ligger innenfor α, og de som ligger utenfor.



Figuren viser tre parallelle Poincarélinjer som er slik at ingen av dem ligger mellom de to andre.

Oppgave 4

a. Trekanten $\triangle AOB$ er likebent, så $\angle OAB \cong \angle OBA$. Dersom vi betegner målet av denne vinkelen ved $v°$, er $\mu(\angle BOA) + 2v° = \sigma(\triangle AOB) = 180°$, siden vi er i euklidsk geometri. Videre er $\angle OAC$ er rett, så $\mu(\angle BAC) + v° = 90°$ ved vinkeladdisjonspostulatet. (Vi trenger at B ligger i det indre av $\angle OAC$. Dette gjelder fordi det er antatt at $B \sim C\ (\overleftrightarrow{OA})$, og $B \sim O\ (\overleftrightarrow{AC})$ fordi tangenten $\overleftrightarrow{AC}$ ikke har noen punkter i det indre av sirkelen.) Dermed er $\mu(\angle BOA) = 180° - 2v° = 2(90° - v°) = 2\mu(\angle BAC)$.

Dersom B og C ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{OA}$, kan vi velge C' slik at $C * A * C'$. Da ligger B og C' på samme side av $\overleftrightarrow{OA}$, så resultatet vi nettopp har vist, gir oss $\mu(\angle BOA) = 2\mu(\angle BAC')$. Men $\angle BAC'$ og $\angle BAC$ danner et linært par, så $\mu(\angle BAC') + \mu(\angle BAC) = 180°$ og vi ender opp med $\mu(\angle BOA) = 2\mu(\angle BAC') = 360° - 2\mu(\angle BAC)$.

Det passer kanskje bedre å skrive dette på formen $360° - \mu(\angle BOA) = 2\mu(\angle BAC)$, og tenke på venstresiden som målet av sirkelbuen som ligger på *utsiden* av $\angle BOA$.

b. I hyperbolsk geometri får vi $\mu(\angle BOA) + 2v° = \sigma(\triangle AOB) < 180°$ i stedet for likheten som gjelder i det euklidske tilfellet. Men radien står også her ortogonalt på tangenten, så $\mu(\angle BAC) + v° = 90°$ gjelder fortsatt. Dermed blir $\mu(\angle BOA) < 180° - 2v° = 2(90° - v°) = 2\mu(\angle BAC)$.