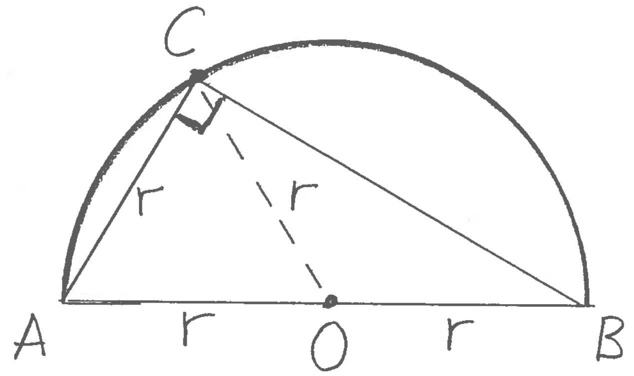
Kontinuasjonseksamen i MA2401/6401: Geometri

Løsningsforslag

Oppgave 1 (ii) og (iii) er sanne, (i) og (iv) er gale.

Oppgave 2

a)

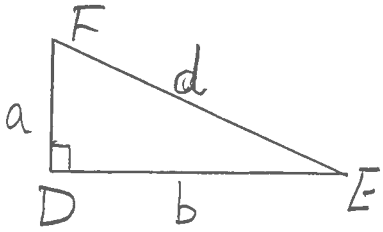


Anta $\angle ACB$ er en rett vinkel. Da ligger C på halvsirkelen som har $\overline{AB}$ som diameter (se figur). Det er oppgitt at $AC = r = OA (= OC)$. Altså er $\triangle OAC$ likesidet, følgelig er $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle OAC) = \underline{60^\circ}$.

Siden $\mu(\angle ACB) = \underline{90^\circ}$, så må

$$\mu(\angle ABC) = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = \underline{30^\circ}$$

b) Vi konstruerer en rettvinklet trekant med kateter a, b og hypotenus d. Pythagoras gir da $a^2 + b^2 = d^2$.



Men siden $a^2 + b^2 = c^2$, så må $c = d$.

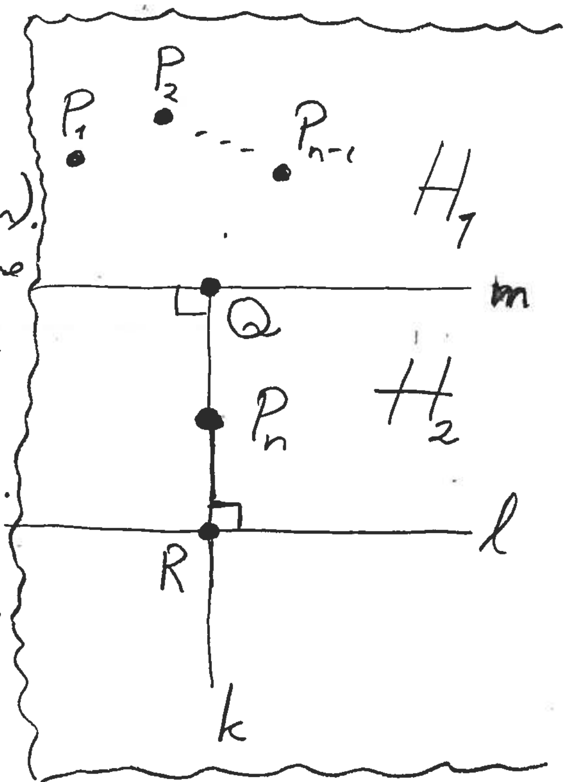
Ifølge (SSS) så er $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.

Da er $\mu(\angle ACB) = \mu(\angle EDF) = \underline{90^\circ}$

c) Ifølge (AAS) så er $\triangle BDN \cong \triangle CFN$ og $\triangle AEM \cong \triangle CFM$. Herav følger det at $DN = NF$ og $EM = MF$. Dette medfører at $MN = \frac{1}{2} ED$. Dessuten er $BD = CF = AE$. Da er $\square DEAB$ en Saccheri-firkant, og følgelig er $ED < AB$, og altså $MN < \frac{1}{2} AB$.

Dersom vi antar at Pythagoras holder generelt, så må $(AC)^2 + (BC)^2 = (2CM)^2 + (2CN)^2 = 4((CM)^2 + (CN)^2) = 4(MN)^2$ ved å betrakte $\triangle MCN$. Men dette gir $(AC)^2 + (BC)^2 < (AB)^2$, og altså holder ikke Pythagoras for $\triangle ACB$, og vi har en motsigelse.

Altså holder ikke Pythagoras generelt i hyperbolsk geometri.



<u>Oppgave 3</u> Påstanden er sann for $n=1$. Anta at påstanden er sann for $n-1$ (induksjonsantagelsen). La m være en linje slik at punktene $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ ligger i et av ~~av~~ de to halvplanene, H_1, som m bestemmer. Anta at P_n ligger i H_2 eller på m. Nedfell en normal k fra P_n på m, og la Q være skjæringspunktet med m. Velg R på k slik at $Q * P_n * R$, og la l være normalen til k gjennom R. Da er $l \parallel m$ (alternerende-vinkel-teoremet), og man ser lett at alle de n punktene ligger i et av halvplanene som l bestemmer. (Dersom $P_n \in m$, må man modifisere argumentet litt.)

<u>Oppgave 4</u> a) Siden ΔCOD er likebeint, så er $\mu(\angle OCD) = \mu(\angle COD) = \beta$. Da er

$$\gamma = \mu(\angle ODB) = \mu(\angle OCD) + \mu(\angle COD) = \underline{2\beta}$$

b) Siden ΔBDO er likebeint, så er $\gamma = \mu(\angle ODB) = \mu(\angle OBD)$. Da er

$$\alpha = \mu(\angle AOB) = \mu(\angle OCD) + \mu(\angle OBD) =$$
$$\beta + \gamma = \beta + 2\beta = \underline{3\beta}$$