Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA2401/MA6401 Geometri**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau
Tlf: 7359 1755

Eksamensdato: 6. juni 2015
Eksamenstid (fra–til): 09.00-13.00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Enkel, gyldig kalkulator tillatt (SR-270X, HP30S). Linjal og passer tillatt

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 3
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

La antall punkter være fem i en insidensgeometri (dvs. de tre insidensaksiomene er oppfyllt). Beskriv (gjerne med en figur) minst tre vesensforskjellige geometrier som finnes.

Oppgave 2

Hvilke av følgende utsagn er sanne og hvilke er usanne? (Svaret skal ikke begrunnes.)

(i) Dersom det finnes en trekant ΔABC i nøytral geometri slik at vinkelsummen $\sigma(\Delta ABC) = 180°$, så er vinkelsummen til alle trekanter lik $180°$.

(ii) Dersom $\square ABCD$ er en Saccheri firkant i nøytral geometri, så er $\square ABCD$ et parallellogram.

(iii) I hyperbolsk geometri finnes det rektangler.

(iv) Dersom l er en linje i euklidsk geometri som ikke går gjennom sentret 0 til en sirkel $\gamma = C\ (0, r)$, så vil bildet av l ved inversjon i γ være en sirkel som 0 ligger på.

Oppgave 3

I euklidsk geometri la $\overline{AB}$ være en diameter i sirkelen $\gamma = C\ (0, r)$ og la D være et punkt på γ slik at $D \neq A$ og $D \neq B$. Bevis at $\angle ADB$ er en rett vinkel.

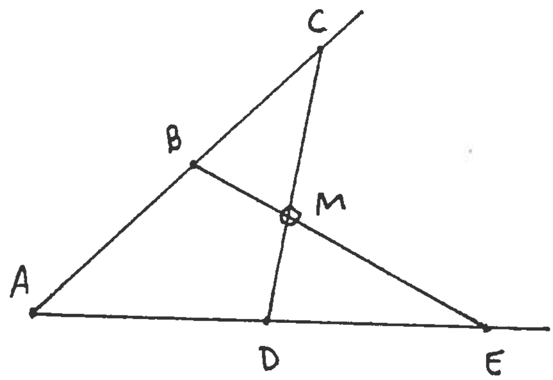
Oppgave 4

I nøytral geometri $G = (\mathbf{P}, \mathbf{L})$, der $\mathbf{P}$ og $\mathbf{L}$ betegner punkter og linjer, henholdsvis, la $l \in \mathbf{L}$, og la A, B, P være tre distinkte punkter slik at $A, B \in l$ og $P \notin l$, og slik at $\mu(\angle BAP) < 90°$. La $\rho_l : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ være refleksjonen om l, og la $P' = \rho_l(P)$. Vis at $AP = AP'$ og at $\mu(\angle BAP) = \mu(\angle BAP')$.

Oppgave 5

Anta at $A * B * C$ på linjen l og $A * D * E$ på en annen linje m i nøytral geometri. Vis at segmentene $\overline{BE}$ og $\overline{CD}$ må snitte herandre i et punkt M. (Se Figur 1.)

(Hint: Bruk "Pasch's axiom".)



Figur 1.

Oppgave 6

I euklidsk geometri la ΔABC være en trekant med spisse vinkler (dvs. alle vinklene er mindre enn $90°$). La U, V og W være indre punkter i segmentene $\overline{BC}, \overline{AC}$ og $\overline{AB}$, henholdsvis. Da er ΔUVW en innskrevet trekant i ΔABC. La $U' = \rho_m(U)$ og $U'' = \rho_n(U)$, der $m = \overleftrightarrow{AC}$ og $n = \overleftrightarrow{AB}$ (se Figur 2).

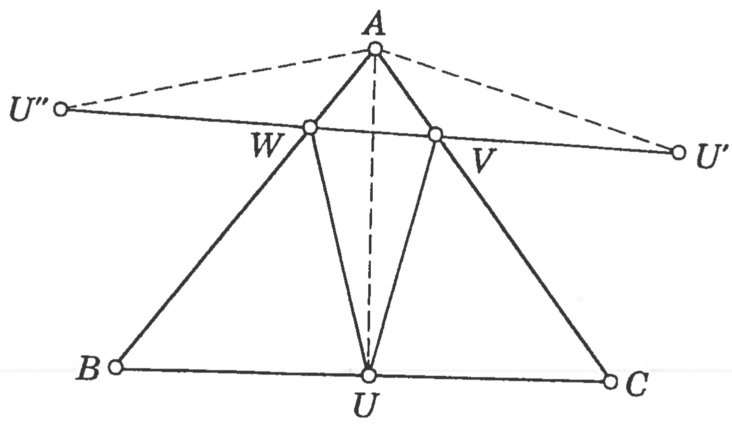
a) Vis at omkretsen til ΔUVW (dvs. $UV + VW + WU$) er lik $U'V + VW + WU''$. [Man observerer (dette skal man ikke vise) at omkretsen til ΔUVW er minst (for fiksert U) når V og W ligger på linjen $\overleftrightarrow{U'U''}$, og da er omkretsen lik $U'U''$. Vi tenker oss V og W heretter valgt slik at dette er tilfellet slik det er illustrert i Figur 2.]

b) Vis at $\mu(\angle U'AU'') = 2\alpha$, der $\alpha = \mu(\angle BAC)$ (og altså er vinkelmålet til $\angle U'AU''$ uavhengig av valget av U). Vis også at $\Delta AU'U''$ er en likebeinet trekant, der $AU' = AU'' = AU$.

c) Vis at ved å velge U til å være fotpunktet av den nedfelte normalen fra A til $\overleftrightarrow{BC}$ (altså høyden ("altitude") fra A), så vil omkretsen til ΔUVW være minst mulig.

(Hint: Bruk resultatene i a) og b).)

d) Påvis at som konklusjon på det ovenstående så har man vist følgende teorem av Fagnano (1775): Hjørnene U, V, W til den innskrevne trekanten i ΔABC som har minst omkrets er fotpunktene til de tre høydene ("altitudes") i ΔABC.



Figur 2.