NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA2401/MA6401 Geometri**

Faglig kontakt under eksamen: Frode Rønning

Tlf: 7355 0256

Eksamensdato: 21. mai 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Enkel, gyldig kalkulator tillatt (SR-270X, HP30S). Linjal og passer tillatt

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

Gitt en modell for en geometri på en kuleoverflate der linjer er definert som storsirkler (sirkler som har sentrum i kulas sentrum) på kuleoverflata og avstand er vanlig euklidsk avstand målt langs storsirkler.

a) Forklar hvorfor denne modellen ikke vil være en modell for nøytral geometri. Pek på minst ett postulat i nøytral geometri som ikke holder.

Løsning: Velg to punkter på en storsirkel slik at disse punktene ligger på en diameter til kula (antipodale punkter, nordpol/sørpol). Gjennom disse punktene kan det trekkes uendelig mange storsirkler, så det postulatet som sier at gjennom to distinkte punkter går det en entydig linje, holder ikke i denne modellen.

b) Et sentralt resultat i nøytral geometri er det såkalte Ytre vinkelteoremet (YVT). Formuler YVT (uten bevis), og vis med et eksempel at YVT ikke holder i den modellen for kulegeometri som er beskrevet ovenfor.

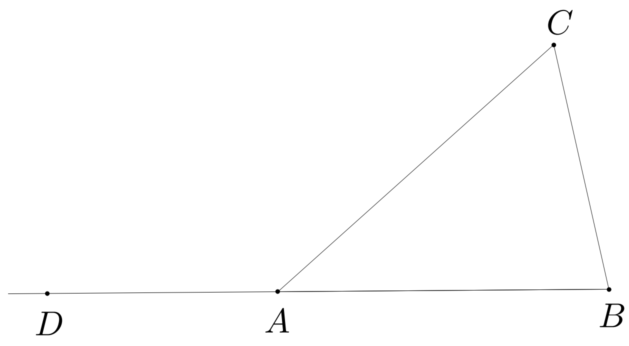
Løsning: YTV sier at den ytre vinkelen ved et hjørne i en trekant er større enn hver av de indre, motstående vinklene i trekanten. Med referanse til Figur 1 betyr det at $\mu(\angle DAC) > \mu(\angle ABC)$ og $\mu(\angle DAC) > \mu(\angle BCA)$. I modellen for kulegeometri, lag en trekant der ett hjørne ligger på Nordpolen til kula og de to andre ligger på kulas Ekvator. Da vil indre og ytre vinkler ved de punktene som ligger på Ekvator være 90 grader, mens vinkelen ved Nordpolen kan lages større enn 90 grader ved å legge de to punktene på Ekvator langt nok fra hverandre. Så YVT holder ikke her. At både indre og ytre vinkel ved Ekvator er 90 grader er også moteksempel nok i seg selv.

c) La $\triangle ABC$ være en trekant og D være et punkt på strålen $\overrightarrow{BA}$ slik at $D{*}A{*}B$. Se Figur 1. En sterkere versjon av YVT er følgende:

$$\mu(\angle DAC) \geq \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA).$$

Bruk resultatet om at vinkelsummen i en trekant i nøytral geometri er mindre enn eller lik 180 grader til å vise ulikheten ovenfor.

Løsning: $\mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) = 180^o$. Fra det vi vet om vinkelsum er $\mu(\angle CAB)+\mu(\angle ABC)+\mu(\angle BCA) \leq 180^o$. Dermed er $\mu(\angle CAB)+\mu(\angle ABC)+\mu(\angle BCA) \leq \mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB)$. Ved å trekke fra $\mu(\angle CAB)$ på begge sider av denne ulikheten får vi $\mu(\angle DAC) \geq \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA)$.



Figur 1:

d) Anta at det finnes en trekant $\triangle ABC$ slik at $\mu(\angle DAC) = \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA)$. Vis til relevante resultater fra pensum for å begrunne at i så fall må det euklidske parallellpostulatet holde.

Løsning: Anta at det finnes en trekant som er slik at $\mu(\angle DAC) = \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA)$. Ut fra resonnementet i punkt c) må denne trekanten ha vinkelsum lik 180 grader. Men vi vet at dersom det i en modell for en geometri finnes en eneste trekant som har vinkelsum 180 grader, så vil alle trekanter i denne modellen ha vinkelsum 180 grader. Men det er ekvivalent med det euklidske parallellpostulatet.

Oppgave 2

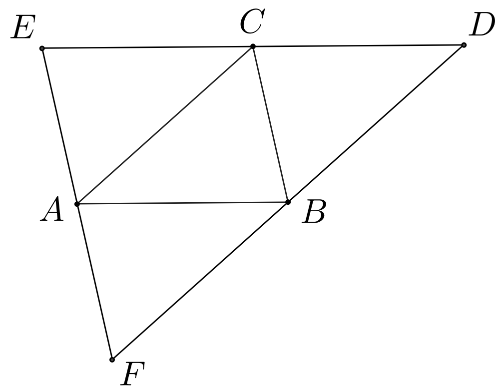
I denne oppgaven gjelder alle postulatene i nøytral geometri samt det euklidske parallellpostulatet.

Gitt $\triangle ABC$. Trekk en linje gjennom hvert hjørne i $\triangle ABC$ som er parallell med den motstående siden. De tre linjene du da får danner en ny trekant, $\triangle DEF$. Se Figur 2.

a) Vis at $\triangle ABC \cong \triangle DCB \cong \triangle CEA \cong \triangle BAF$. Gjør tydelig rede for hvilke resultater du bruker for å vise kongruensene.

Løsning: Siden det euklidske parallellpostulatet holder, holder også MAIVT. Fra dette får vi $\angle ACE \cong \angle CAB, \angle ABC \cong \angle BCD$ og $\angle CAE \cong \angle ACB$. Ved å bruke at vinkelsummen i en trekant er 180 grader samt at summen av vinkler som til sammen utgjør en rett linje også er 180 grader får vi

$$\angle AEC \cong \angle ABC \cong \angle FAB.$$



Figur 2:

MAIVT kan også uttrykkes som at samsvarende vinkler er like store. Dette gir $\angle AFB \cong \angle CAE$ og $\angle FBA \cong \angle BDC \cong \angle CAB$. Endelig er $\angle CBD \cong \angle AFB$ (samsvarende vinkler). Nå er alle vinklene kartlagt, og det er klart at de fire trekantene er formlike. Men siden $\triangle ABC$ deler en side med hver av de tre andre trekantene, må de faktisk være kongruente ut fra ASA-resultatet.

b) Vis at $\overline{DA}, \overline{EB}$ og $\overline{FC}$ er medianene i $\triangle DEF$. Skriv opp Cevas setning (uten bevis), og bruk denne til å vise at $\overline{DA}, \overline{EB}$ og $\overline{FC}$ har et felles skjæringspunkt.

Løsning: Siden $EA = AF$, $EC = CD$ og $DB = BF$, dette følger av kongruensene vist i punkt a), må A være midtpunktet på $\overline{EF}$, B være midtpunktet på $\overline{FD}$ og C være midtpunktet på $\overline{ED}$. Dermed er $\overline{DA}, \overline{EB}$ og $\overline{FC}$ er medianene i $\triangle DEF$.

Gitt $\triangle DEF$, A et punkt på $\overline{EF}$, B et punkt på $\overline{FD}$ og C et punkt på $\overline{DE}$. Cevas setning sier da at $\overline{DA}, \overline{EB}$ og $\overline{FC}$ har et felles skjæringspunkt hvis og bare hvis $\frac{DC}{CE} \cdot \frac{EA}{AF} \cdot \frac{FB}{BD} = 1$.

Siden A, B og C er midtpunkt på sine respektive sider, er hver av brøkene i produktet ovenfor lik 1. Dermed følger det at medianene har et felles skjæringspunkt.

c) Trekk midtnormalene til sidene $\overline{DE}, \overline{EF}$ og $\overline{FD}$. Forklar hvorfor disse midtnormalene er høydene i $\triangle ABC$ og hvorfor de har et felles skjæringspunkt. Hva kalles dette punktet, og hvilke egenskaper har det?

Løsning: Midtnormalen til $\overline{DE}$ går gjennom C og står vinkelrett på $\overline{DE}$. Dermed står den også vinkelrett på $\overline{AB}$ siden $\overline{AB}$ og $\overline{DE}$ er parallelle. Denne midtnormalen er derfor en høyde i $\triangle ABC$. Tilsvarende resonnement kan gjøres for de to andre midtnormalene i $\triangle DEF$. Midtnormalen på et linjestykke er mengden av alle punkter som ligger like langt fra linjestykkets endepunkter. Trekk midtnormalen til $\overline{DE}$ og $\overline{EF}$. I euklidsk geometri må disse midtnormalene skjære hverandre, og skjæringspunktet vil ligge like langt fra D som fra E som fra F. Dvs. det ligger også på midtnormalen til $\overline{FD}$. Dette punktet ligger da like langt fra alle hjørnene i $\triangle DEF$ og er sentrum i denne trekantens omskrevne sirkel. Det kalles omsentret til $\triangle DEF$. Men siden disse linjene er høydene i $\triangle ABC$ vil dette punktet også være ortosenteret i $\triangle ABC$.

Oppgave 3 La $\triangle ABC$ være en trekant i nøytral geometri, og la E være et punkt på $\overline{BC}$. Da gjelder

$$\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA) = \sigma(\triangle ABC) + 180°.$$

Dette resultatet skal ikke bevises. $\sigma(\triangle ABC)$ betyr vinkelsummen i $\triangle ABC$. Definer *defekten* i trekanten $\triangle ABC$ som $\delta(\triangle ABC) = 180° - \sigma(\triangle ABC)$.

a) Vis at $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABE) + \delta(\triangle ECA)$.

Løsning: $\delta(\triangle ABC) = 180° - \sigma(\triangle ABC) = 180° - (\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA) - 180°) = 180° - \sigma(\triangle ABE) + 180° - \sigma(\triangle ECA) = \delta(\triangle ABE) + \delta(\triangle ECA)$.

I hyperbolsk geometri gjelder at for enhver trekant $\triangle ABC$ er $\delta(\triangle ABC) > 0$.

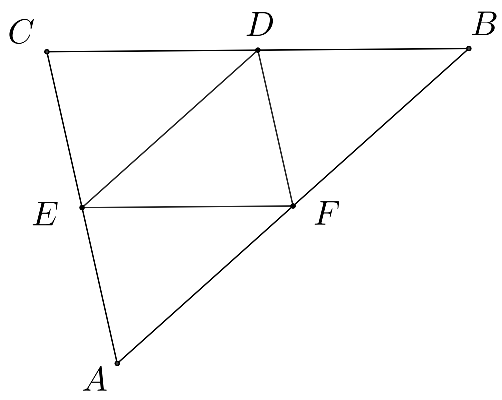
b) Bruk dette og punkt a) til å vise at i hyperbolsk geometri kan ikke alle trekanter ha samme defekt.

Løsning: Anta at alle trekanter har samme defekt, $c > 0$. Dvs. i situasjonen i punkt a) er $\delta(\triangle ABE) = \delta(\triangle ECA) = c$. Men da må $\delta(\triangle ABC) = 2c > c$, siden $c > 0$ - en motsigelse.

La $\triangle ABC$ være en hyperbolsk trekant. La D være midtpunktet på $\overline{BC}$, E være midtpunktet på $\overline{AC}$ og F være midtpunktet på $\overline{AB}$.

c) Vis at $\sigma(\triangle DEF) > \sigma(\triangle ABC)$.

Løsning: Situasjonen blir som vist i Figur 3 (neste side). Vi har $\sigma(\triangle DEF) + \sigma(\triangle CED) + \sigma(\triangle AFE) + \sigma(\triangle FBD) < \sigma(\triangle DEF) + 3 \cdot 180°$. Men vi har også $\sigma(\triangle DEF) + \sigma(\triangle CED) + \sigma(\triangle AFE) + \sigma(\triangle FBD) = \sigma(\triangle ABC) + 3 \cdot 180°$ siden vi har rette linjer ved D, E og F. Av dette følger at $\sigma(\triangle DEF) > \sigma(\triangle ABC)$.



Figur 3: