Ⓐ

Løsninger:

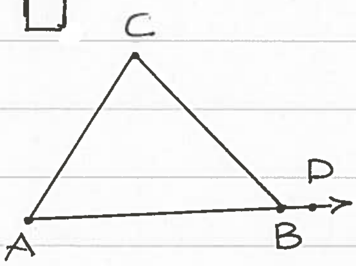
Oppgave 1:

	N	E	H
(a)	☒	☒	☒
(b)	☐	☒	☐
(c)	☒	☒	☒
(d)	☐	☒	☐
(e)	☐	☐	☒
(f)	☐	☒	☐
(g)	☐	☐	☒
(h)	☐	☒	☐

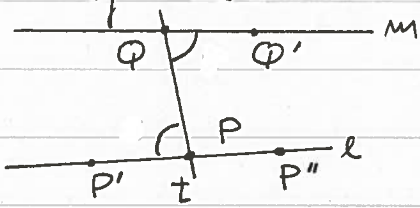
Jeg trekker 3 p for hver feil.

Max: 25 p

Oppgave 2:



(a) (YVT) Den ytre vinkel $\angle CBD$ i en trekant $\triangle ABC$ er ekte større enn hver av de motstående indre vinkler $\angle BAC$ og $\angle BCA$.



(AIVT) Hvis $\angle P'PQ \cong \angle Q'QP$ så er $l \parallel m$.

(t er en transversal som skjærer l i P og m i Q)

Ⓑ

BEVIS:

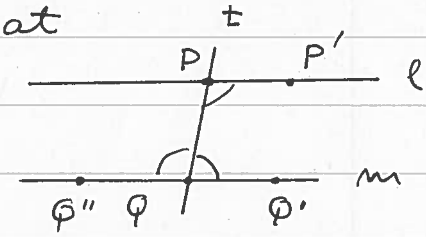
Anta at l og m skjærer hverandre til høyre for t på figuren. Kall skjæringspunktet T. Da vil $\triangle PQT$ ha en indre vinkel $\angle Q'QP$ som er kongruent med den ytre vinkel $\angle QPP'$. Dette er i strid med YVT. Helt tilsvarende vil antagelsen om at l og m skjærer hverandre på den andre siden av t være i motstrid med YVT. Altså må $l \| m$.

(b) Dersom vi har at

$$\mu(\angle P'PQ) + \mu(\angle Q'QP) = 180,$$

følger det at

$$\mu(\angle Q''QP) = \mu(\angle P'PQ)$$



siden $\mu(\angle Q''QP) + \mu(\angle Q'QP) = 180°$. (de utgjør et lineært par!) Ut fra AIVT betyr dette at $l \| m$.

(c) Den motsatte implikasjonen:

$$l \| m \Rightarrow \mu(\angle P'PQ) + \mu(\angle Q'QP) = 180°$$

ville ut fra det ovenstående være ekvivalent med at

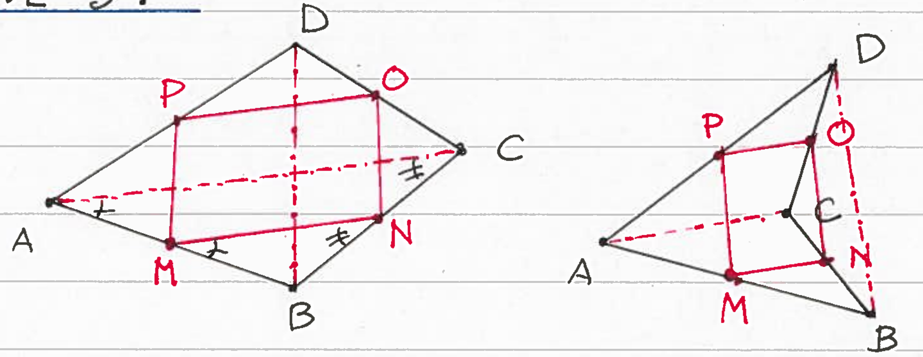
$$l \| m \Rightarrow \mu(\angle Q''QP) = \mu(\angle P'PQ)$$

Dette betyr at det fantes eksakt <u>en</u> parallell til m gjennom P. Men dette gjelder ikke for hvert punkt P og hver linje l i nøytral geometri.

C

OPPGAVE 3:

(a)



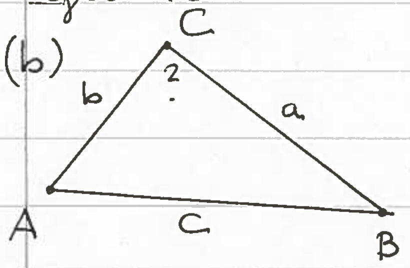
(a) Vi beviser først at $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Ut fra "Converse to Similar Triangle Theorem", (s. 114; Venema) har vi

$$\frac{BA}{BM} = 2 = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBN$$

Ut fra et velkjent korollar til AIVT er da $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Helt analogt bevises at $\overleftrightarrow{OP} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Ut fra "Transitivity of Parallelism", (s. 108; Venema) følger det da at $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{OP}$.

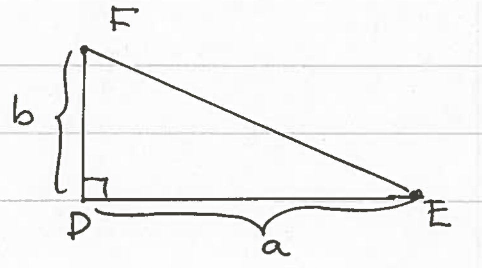
Helt analogt innses at $\overleftrightarrow{NO} \parallel \overleftrightarrow{MP}$. Argumentet baserer seg på euklidske geometri der man bl.a. trenger setningen om formlike trekanter. Formlike trekanter som ikke er kongruente eksisterer som kjent ikke i hyperbolske geometri

(b)



Vi antar altså at

$$a^2 + b^2 = c^2$$



La $\triangle DEF$ være

en rettvinklet trekant med kateter $DE = a$ og $DF = b$. Ut fra Pytagoras' teorem er da:

$$(FE)^2 = a^2 + b^2$$

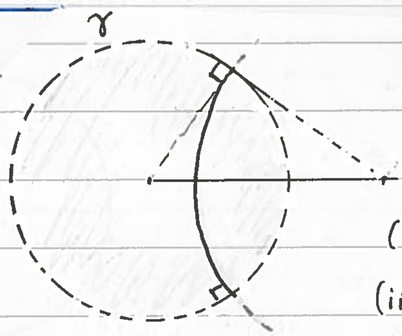
Men da må $FE = c = AB$. Ut fra SSS-teoremet må da

$$\triangle ABC \cong \triangle FED.$$

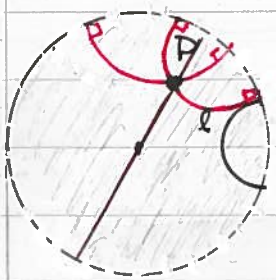
Spesielt må da $\angle ACB \cong \angle FDE$.
Altså er $\mu(\angle ACB) = 90°$.

OPPGAVE 4:

(a)



Planet $\mathbb{P} = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$
Linjer av to typer:
(i) Diametre.
(ii) Sirkelbuer $\perp \gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$



Vi ser straks at det finnes uendelig mange Poincaré-linjer gjennom P som ikke snitter l.

To linjer i denne modellen er $\perp$ på hverandre dersom tangentene i skjæringspunktet er $\perp$ på hverandre i euklidsk forstand.

(b) En euklidsk inversjon $I_{O,r}$ i $C = C(O,r)$ er en avbildning som oppfyller betingelsene

(i) O, P, P' er kolineære, og $(OP)(OP') = r^2$

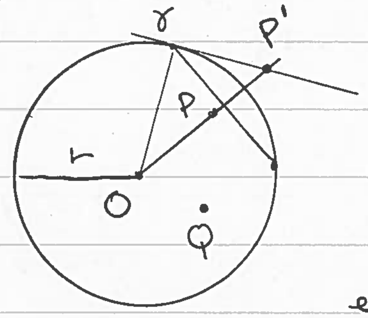
E

når $I_{O,r}(P) = P'$.

Dessuten defineres $I_{O,r}(O) = \infty$ og $I_{O,r}(\infty) = O$.

At sirklene β og γ står vinkelrett på hverandre i euklidsk geometri vil si at tangentene (radiene) står vinkelrett på hverandre i skjæringspunktene (i vanlig euklidsk forstand.)

(c)



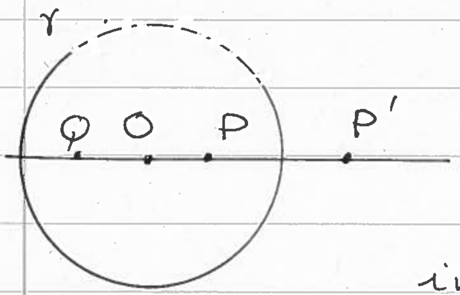
Anta først at P, Q og O ikke er kolineære. Vi må vise at det finnes en sirkelbue ℓ s.a. $\ell \perp \gamma$ og s.a. $P, Q \in \ell$. Ut fra det siterte teorem må da f.eks. $P' = I_{O,r}(P)$ også ligge på den sirkelen β som inneholder buen ℓ. Siden P ligger innfor γ, ligger P' utenfor γ. P, P', Q er ikke kolineære siden P, P' og O er kolineære. Det er som kjent i euklidsk geometri eksakt en sirkel β som går gjennom P, P' og Q. Ut fra det siterte teorem må da $\beta \perp \gamma$ siden P og P' ligger på β. Entydigheten av konstruksjonen sikrer oss at vi har entydigheten i insidens-postulatet.

Vi ser da på tilfellet at

F

de P, Q og O er kolineære. Da vil diametrien gjennom de tre linjene være den sökte hyperbolske linje.

Hvorfor er det ingen sirkel bue som går gjennom P og Q og samtidig er $\perp$ på γ. En slik sirkel må også inneholde P'. Men da er Q, P, P' kolineære. Det finnes ingen euklidske sirkel som inneholder 3 kolineære punkter.



(G)

Løsn. Eks MA 2401 / MA 6401 , 21/5-2012

Noen kommentarer:

Oppg 2:

Alternativ metode:

Anta at ℓ og m skjærer hverandre i et punkt T til høyre for t på figuren. Legendre / Saccheri – teoremet gir

$$\sigma(\triangle PQT) \leq 180 .$$

Men da blir $\mu(\angle PTQ) \leq 0$, noe som er umulig.

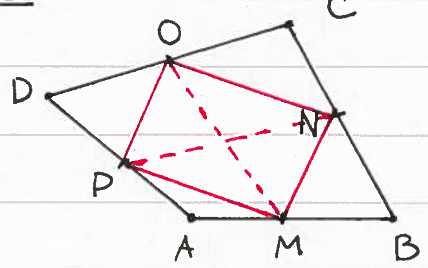
Siden vi også har:

$$\mu(\angle P''PQ) + \mu(\angle Q''QP) = 180°$$

får vi samme konklusjon hvis ℓ og m skjærer hverandre i et punkt S på venstre side av t.

Oppg 3:

(a)



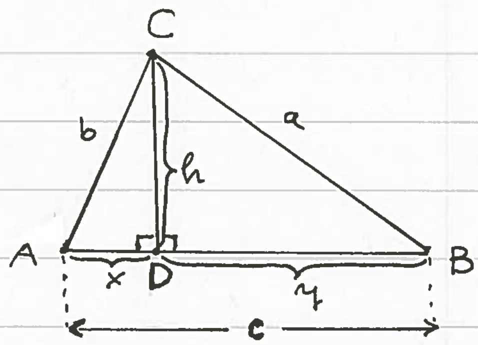
Mange tror at et kvadrilateral er det samme som et rektangel. Noen trekker diagonalene i $\square MNOP$ – og kommer ingen vei videre. Noen benytter at diagonalene $\overline{PN}$ og $\overline{MO}$ halverer hverandre – noe vi ikke har bevist!

(b) Alternativ metode:

Vi antar altså at

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ved Scalene Inequality får vi at



Ⓗ

$\mu(\angle ACB) > \mu(\angle CAB)$ og $\mu(\angle ACB) > \mu(\angle CBA)$ siden $c > a$ og $c > b$. Ved lemma 4.8.6 (s. 99, Venema) får vi at fotpunktet D av normalen fra C på $\overleftrightarrow{AB}$ er s.a.

$$A * D * B.$$

Vi har da ved Pytagoras:

$$x^2 + h^2 = b^2 \quad \text{og} \quad y^2 + h^2 = a^2$$

Dette gir videre:

$$(x^2 + h^2) + (y^2 + h^2) = b^2 + a^2 \overset{\text{ant.}}{=} c^2$$

Siden $c = x + y$, har vi:

$$x^2 + y^2 + 2h^2 = c^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Altså har vi:

$$h^2 = xy$$

eller: $h/x = y/h$. Siden $\triangle ADC$ og $\triangle CDB$ begge er rettvinklete trekanter, gir SAS-formlikhetskriteriet (T.5.3.3, s. 113, Venema) at $\triangle ADC \sim \triangle CDB$. Spesielt har vi:

$$\angle CAD \cong \angle DCB$$

Videre gir dette:

$$\mu(\angle ACD) = 90° - \mu(\angle CAD) = 90° - \mu(\angle DCB)$$

eller:

$$\underline{\mu(\angle ACB)} = \mu(\angle ACD) + \mu(\angle DCB) = \underline{90°}$$