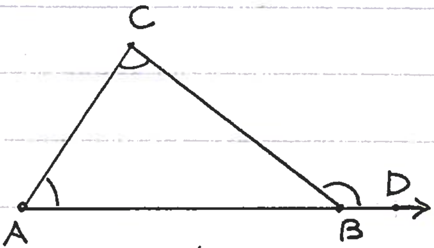
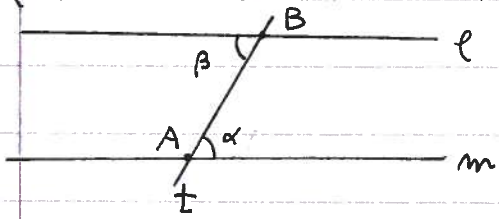
LØSNINGER:

OPPGAVE 1:



(a) Ytre vinkel $\angle CBD$ er ikke større enn hver av de motstående indre vinkler $\angle CAB$ og $\angle BCA$ i $\triangle ABC$; (YVT).

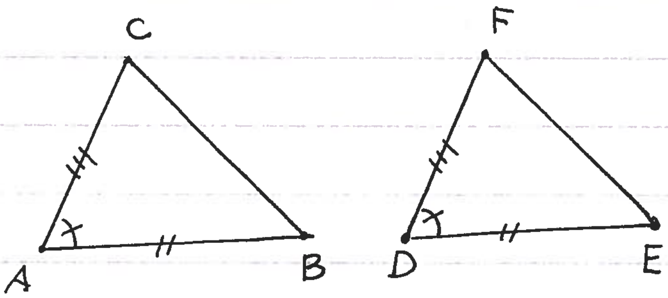
(b) Alternativ-indre-vinkel-teorem (AIVT):



Dersom et par av alternative indre vinkler, α, β på figuren, er kongruente, så vil $\ell \parallel m$.

Bevis: Hvis ℓ og m skjærer hverandre i et punkt T på samme side av t der α ligger, får vi en trekant $\triangle ABT$ der den indre vinkel α er kongruent med den ytre vinkel β på vår figur. Dette strider mot YVT. Altså kan vi ikke ha skjæring mellom ℓ og m på denne siden av t. Beviset er helt analogt om vi antar at ℓ og m skjærer hverandre på motsatt side av t. Altså er $\ell \parallel m$.

(c) Side-vinkel-side-aksiomet (SAS):



Dersom $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ og $\angle CAB \cong \angle FDE$, så vil $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Løsn. forts.

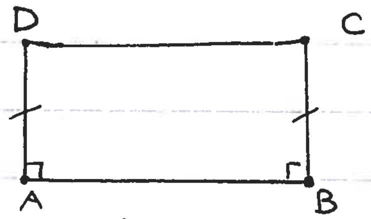
(d)

AAS: Dersom $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ og $\angle BCA \cong \angle EFD$, så vil $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

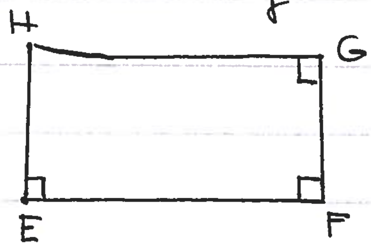
BEVIS:

Dersom $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ følger det fra SAS at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Vi kan da uten tap av generalitet anta at $B < EF$. Vi avsetter da punktet F' på $\overline{EF}$ s.a. $E * F' * F$ og s.a. $\overline{EF'} \cong \overline{BC}$. Ut fra SAS har vi da at $\triangle ABC \cong \triangle DEF'$. Spesielt er da $\angle EF'D \cong \angle BCA$. Men ut fra antagelsen er også $\angle BCA \cong \angle EFD$, og dermed $\angle EF'D \cong \angle EFD$. Dette er i strid med YVT for trekanten $\triangle DFF'$. Altså må $EF \cong BC$ og $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. (I tillegg til SAS og YVT har vi ovenfor benyttet oss av det boken kaller Segment Construction Theorem, s. 92, oppg. 5.20)

OPPGAVE 2:



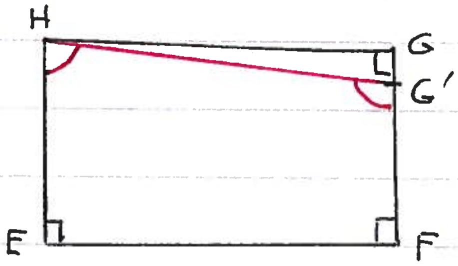
(a) En Saccheri-firkant er et kvadrilateral $\square ABCD$ der $\angle DAB$ og $\angle CBA$ er rette og der $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. En Lambert-firkant er et kvadrilateral $\square EFGD$ der $\angle HEF$, $\angle EFG$ og $\angle FGH$ alle er rette.



Løsn. forts.

(b) Begge prøvde å bevise at innenfor nøytral geometri måtte alle fire vinkler være rette, m.a.o. at firkantene var rektangler. Saccheri beviste at de to toppvinklene var kongruente og $\leq 90°$. Lambert klarte å bevise at den fjerde vinkelen var $\leq 90°$. De hadde begge bevis for at hvis disse firkanter var rektangler, så måtte de euklidske parallellpostulat være et teorem innenfor nøytral geometri.

(c) Anta det motsatte: $FG > EH$. Vi avsetter da et punkt G' på FG s.a. $F * G' * G$ og s.a. $FG' = EH$. Da blir



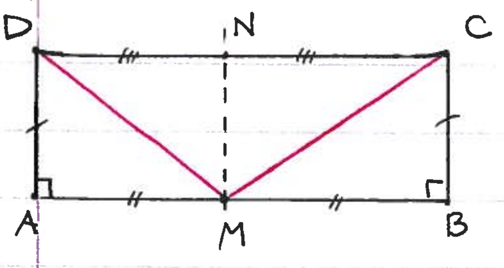
$\square EFG'H$ en Saccheri-firkant. Da har vi altså $\angle FG'H \cong \angle EHG'$. Siden G' er indre punkt i $\angle HG$, har vi at

$$\mu(\angle EHG') < \mu(\angle EHG) \leq 90°$$

Altså er $\angle FG'H$ spiss. Men dette er i strid med YVT anvendt på trekanten $\triangle HGG'$. Altså må

$$FG \leq EH.$$

(d)



Ut fra SAS har vi at $\triangle AMD \cong \triangle BMC$. Da må $\overline{DM} \cong \overline{CM}$. Ut fra SSS er da $\triangle DMN \cong \triangle CMN$ og dermed

(Lösn. fort.)

$\angle DNM \cong \angle CNM$. Siden disse vinkler dessuten er supplement-vinkler må begge være rette. Videre følger fra ovenstående kongruenser:

$$\angle AMD \cong \angle BMC \quad \text{og} \quad \angle DMN \cong \angle CMN.$$

Addisjon gir:

$$\mu(\angle AMN) = \mu(\angle AMD) + \mu(\angle DMN)$$
$$= \mu(\angle BMC) + \mu(\angle CMN) = \mu(\angle BMN)$$

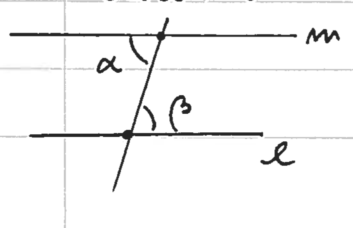
Siden $\angle AMN$ og $\angle BMN$ er supplement-vinkler må begge være rette. Altså er $\overleftrightarrow{MN}$ en felles-normal for $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{CD}$.

To linjer som har en felles-normal er parallelle ut fra AIVT. Altså er $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ siden disse linjer har fellesnormalen $\overleftrightarrow{MN}$, og $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ siden disse har fellesnormalen $\overleftrightarrow{AB}$ ut fra definisjonen av Saccheri-firkanter. Altså er $\square ABCD$ et parallellogram.

Vi har at $\square AMND$ er en Lambert-firkant. Ut fra (c) er da $CB \geq MN$. Analogt får vi at $DA \geq MN$.

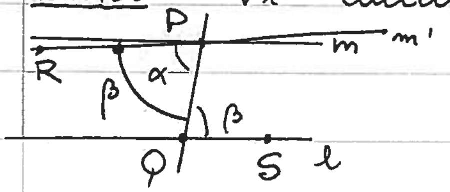
OPPGAVE 3:

(a) Det motsatte av alternativ-indre-vinkel-teorem: Hvis $\ell \parallel m$, så er de alternative indre vinkler α og β kongruente.

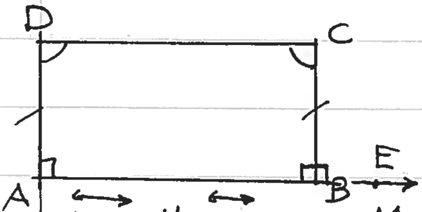


(Løsn fort.)

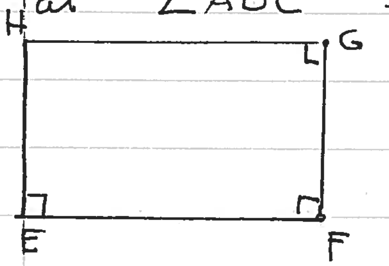
BEVIS: Vi antar at $m \parallel l$. Dersom m' er en linje gjennom P er s.a. $\angle QP \cong \angle PQS$, er $m'' \parallel l$ ut fra AIVT.



Men siden det gjennom P går eksakt en linje som er parallell med l, må $m = m'$. Altså er $\angle\alpha = \angle\beta$.

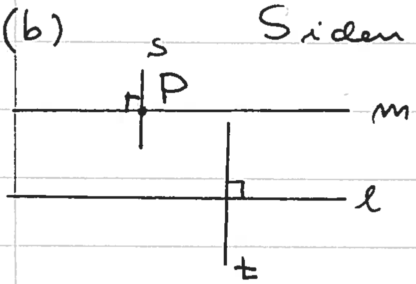


Vi vet fra tidligere oppgave at en Saccheri-firkant er et parallellogram: Altså spesielt $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. Men da er $\angle BCD \cong \angle CBE \cong \angle ABC$ som er rett. Analogt bevises at $\angle ADC$ er rett.

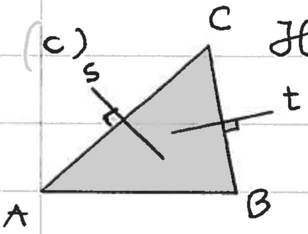


Siden $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$ i en Lambert-firkant, må ved tilsvarende argument $\angle EHG$ være rett.

(b) Siden $P \in s$ og $s \neq m$, må s skjære l ut fra det euklidske parallell-postulat. Ut fra det motsatte av AIVT må da $s \perp l$. Da kan $s = t$. I motsatt fall har s og t felles-normalen l – og de er da parallelle.



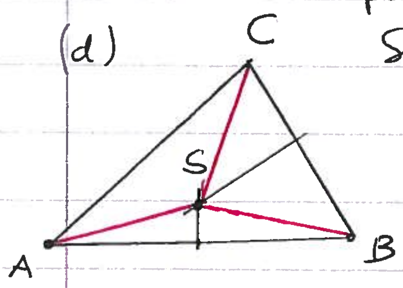
(c) Hvis midtnormalene s og t er parallelle må $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ eller $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ ut fra (b). Begge alternativer strider



(Løsn. forts.)

mot definisjonen av en firkant.

(d) Skjæringspunktet mellom midtnormalene på $\overline{AB}$ og $\overline{BC}$ betegnes S. Ut fra punktvis karakterisering av midtnormal på linjesegment har vi da:



$$SA = SB \quad \text{og} \quad SB = SC$$

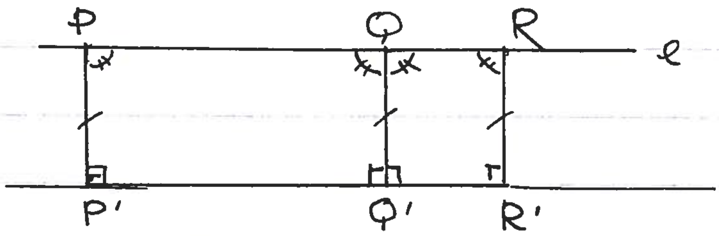
Dette gir $SA = SC$. Ved igjen å benytte punktvis karakterisering av midtnormal, betyr dette at S også ligger på midtnormalen til $\overline{CA}$.

En sirkel med sentrum i S og radius $r = SA = SB = SC$ vil da være en omskrevet sirkel til $\triangle ABC$.

OPPGAVE 4:

(a) Anta at det finnes tre distinkte punkt $P, Q, R \in \ell$ s.a.

$$d(P,m) = d(Q,m) = d(R,m)$$



Vi har de tre Saccheri-firkanter:

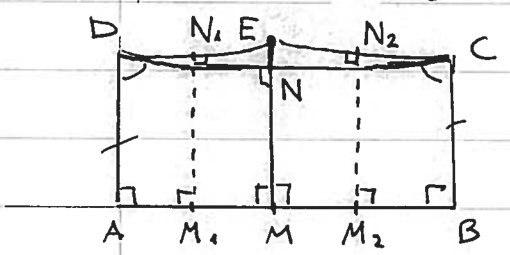
$\square PP'Q'Q$, $\square PP'R'R$ og $\square QQ'R'R$.

Da er som vist tidligere:

$\angle P'PQ \cong \angle Q'QP$, $\angle P'PR \cong \angle R'RP$ og

$\angle Q'QR \cong \angle R'RQ$. Spesielt gir dette at $\angle Q'QP \cong \angle Q'QR$. Men disse vinklene er supplementvinkler og må derfor begge være rette. Altså er alle de fire vinklene $\angle P'PQ$, $\angle Q'QP$, $\angle Q'QR$ og $\angle R'RP$ rette. Altså har vi tre rektangler $\square P'Q'QP$, $\square Q'QRR'$ og $\square P'PRR'$ – i strid med det faktum at rektangler ikke finnes i hyperbolsk geometri. Altså kan høyst to punkter på l ha samme avstand til m.

(b) Vi må vil her finne en trekant der minst to av midtnormalene på sidene er parallelle. Vi starter med en Saccheri-firkant. Vi har



tidligere bevist at $\overleftrightarrow{MN}$ er midtnormalen på $\overline{CD}$ og at $MN < AD$ og $MN < BC$. Vi avsetter et punkt E s.a. $M * N * E$ og s.a. $ME = AD = BC$. Da blir $\square AMED$ og $\square BMEC$ Saccheri-firkanter. Som foran konstruerer vi linjene $\overleftrightarrow{M_1N_1}$ og $\overleftrightarrow{M_2N_2}$ som blir felles-normal for henholdsvis $\overline{AM}$ og $\overline{DE}$ og for $\overline{BM}$ og $\overline{CE}$. Da blir $\overleftrightarrow{NE}$, $\overleftrightarrow{M_1N_1}$ og $\overleftrightarrow{M_2N_2}$ midtnormalen til de tre sidene i $\triangle DCE$. Disse linjene er parallelle. Hadde $\triangle DCE$ en omskrevet sirkel med sentrum S, ville de tre midtnormalene skjære hverandre i S.