Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Per Hag (73 59 17 43)

EKSAMEN I MA2401/MA6401 GEOMETRI

Fredag 27. mai 2011
Tid: 09:00 – 13:00, Sensur 17.06.11

Hjelpemidler: Kode D. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Enkel gyldig kalkulator tillatt (SR-270X, HP30S). Linjal og passer tillatt.

Alle punkter vurderes likt.

Oppgave 1

(NØYTRAL GEOMETRI)

a) Skriv opp ytre-vinkel-teoremet for trekanter. (Bevis kreves ikke.)

b) Bevis alternativ-indre-vinkel-teoremet.

c) Skriv opp [redacted]-side-vinkel-side-aksiomet (SAS) for kongruens mellom to trekanter.

d) Bevis vinkel-vinkel-side-teoremet (AAS) for kongruens mellom to trekanter. Hvilke aksiomer/teoremer benyttes i beviset?

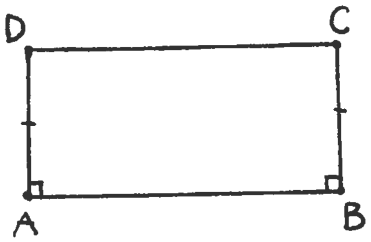
Oppgave 2

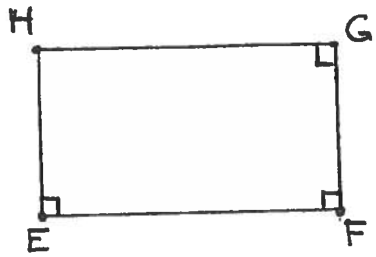
(NØYTRAL GEOMETRI)

a) Hva forstår man ved en Saccheri-firkant, (Saccheri quadrilateral) og hva forstår man ved en Lambert-firkant (Lambert quadrilateral)?

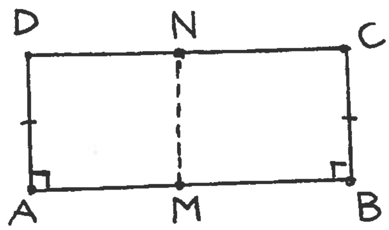
b) Hva ønsket Saccheri og Lambert å bevise ved å studere disse firkanter? Hva klarte de å bevise? (Her kreves et kort svar uten bevis og uten utdyping av konsekvensene dersom de hadde lyktes i sine bestrebelser.)

c) Bevis at dersom toppvinklene i en Saccheri-firkant er $\angle BCD \cong \angle ADC$ og begge er $\leq 90^0$, så følger det at $EH \geq FG$ i Lambert-firkanten $\square EFGH$. (Det kreves ikke bevis for utsagnet om Saccheri-firkanter ovenfor.)





d) La $\square ABCD$ være en Saccheri-firkant. La M betegne midtpunktet på $\overline{AB}$ og N midtpunktet på $\overline{CD}$. Bevis at $\overleftrightarrow{MN}$ er felles-normal for $\overleftrightarrow{AB}$ og $\overleftrightarrow{CD}$. Bevis at $\square ABCD$ er et parallellogram. Bevis deretter at $MN \leq DA$ og $MN \leq BC$.



Oppgave 3

(EUKLIDSK GEOMETRI)

a) Skriv opp det motsatte av alternativ-indre-vinkel-teoremet. Gi en kort begrunnelse for at dette teoremet gjelder i euklidsk geometri. Bevis at Saccheri-firkanter og Lambert-firkanter er rektangler.

b) Bevis at dersom l, m, t og s er linjer og $l||m$, $t \perp l$ og $s \perp m$, så må enten $t = s$ eller $t||s$.

c) Bevis at midtnormalene til to sider i en trekant ikke kan være parallelle.

d) Bevis at midtnormalene til de tre sidene i en trekant skjærer hverandre i et og samme punkt. Forklar hvorfor dette faktum medfører at enhver trekant har en omskrevet sirkel.

Oppgave 4

(HYPERBOLSK GEOMETRI)

a) La $l||m$. Bevis at det da finnes høyst to punkt på l som har samme avstand til m. (Her er det lovlig å benytte, blant annet, at det ikke finnes rektangler i hyperbolsk geometri, uten at det kreves bevis for denne påstand.)

b) Gi et eksempel på en trekant som ikke har en omskrevet sirkel.