Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Per Hag (73 59 17 43)

EKSAMEN I MA2401/MA6401 GEOMETRI

Tirsdag 25. mai 2010
Tid: 09:00 – 13:00, Sensur 15.06.10

Hjelpemidler: Kode D. Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Enkel gyldig kalkulator tillatt (SR-270X, HP30S). Linjal og passer tillatt.

Oppgavene 1 og 4 teller 20% hver, mens oppgavene 2 og 3 teller 30% hver.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal en i hvert punkt krysse av *i en eller flere av rutene* for å angi at det framsatte utsagn/teorem er sant i:

$\overset{N}{\square}$ = nøytral geometri, $\overset{E}{\square}$ = euklidsk geometri, $\overset{H}{\square}$ = hyperbolsk geometri,

(Ytterligere begrunnelse kreves ikke i denne oppgaven.)

a) Ytre-vinkelteoremet. $\overset{N}{\square}$ $\overset{E}{\square}$ $\overset{H}{\square}$

b) Vinkelsummen i en trekant er $\leq 180°$. $\overset{N}{\square}$ $\overset{E}{\square}$ $\overset{H}{\square}$

c) Pytagoras' teorem. $\overset{N}{\square}$ $\overset{E}{\square}$ $\overset{H}{\square}$

d) Motstående sider i et parallellogram er like lange. N ☐ E ☐ H ☐

e) Fundamentalteoremet for formlike trekanter. N ☐ E ☐ H ☐

f) To formlike trekanter er kongruente. N ☐ E ☐ H ☐

g) Avstanden mellom to parallelle linjer er konstant. N ☐ E ☐ H ☐

h) Den fjerde vinkelen i en Lambert-firkant er spiss. N ☐ E ☐ H ☐

Oppgave 2

(NØYTRAL GEOMETRI)

a) Skriv opp ytre-vinkel-teoremet. Bevis kreves ikke.

b) Bevis at vinklene ved grunnlinjen i en likebenet trekant er kongruente. Hvilke aksiom/postulat benyttes i beviset?

c) Bevis at dersom man i $\triangle ABC$ har at $AB > BC$, så må $\mu(< ACB) > \mu(< CAB)$.

d) Bevis Scalene-ulikheten:
Dersom $\triangle ABC$ er en vilkårlig trekant, så vil $AB > BC$ hvis og bare hvis $\mu(< ACB) > \mu(< CAB)$.

e) Bevis trekantulikheten: Hvis A, B og C ikke er kolineære, så gjelder:

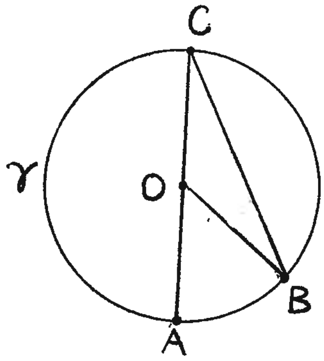
$$AC < AB + BC$$

f) Bevis at dersom A, B og C er tre distinkte punkter, så gjelder

$$AC \leq AB + BC$$

Oppgave 3

(EUKLIDSK GEOMETRI)



a) La A, B og C være tre distinkte punkter på sirkelen γ med sentrum i O. Bevis at dersom AOC er kolineære (se figur), så vil

$$\mu(\angle ACB) = \frac{1}{2}\mu(\angle AOB).$$

b) Hva kan sies om to pereferivinkler som spenner over samme sirkelbue (slik som $\angle DAC$ og $\angle DBC$ på figur 1.)? Hva kan sies om vinklene $\angle DAC$ og $\angle DCT$ på figur 2. når $\overleftrightarrow{CT}$ er tangent til sirkelen. Bevis for påstandene kreves ikke.

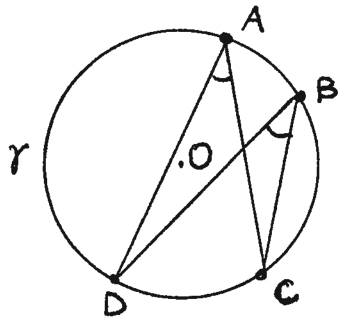


Fig. 1

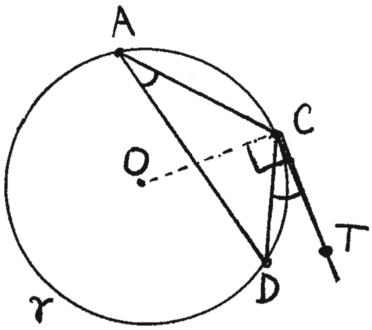
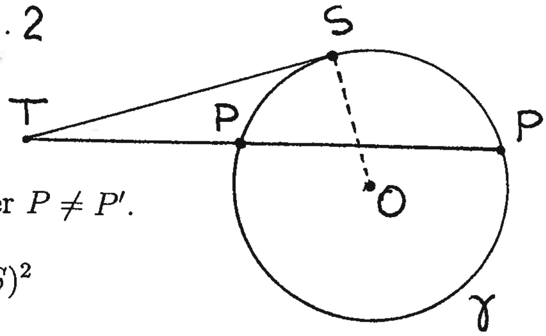


Fig. 2

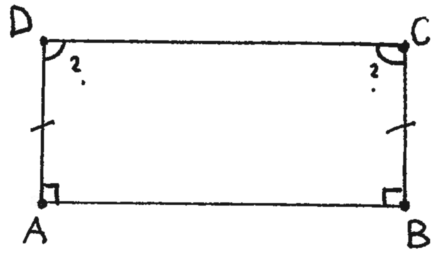
c) Anta at T ligger utenfor sirkelen γ og at $\overleftrightarrow{TS}$ er en tangent til γ gjennom T. La videre sekanten på figuren skjære γ i punktene P og P' der $P \neq P'$. Bevis at da må

$$(TP)(TP') = (TS)^2$$



d) La $\gamma = C(O, r)$ og $\alpha = C(O', r')$ være to sirkler som skjærer hverandre i to punkt. Anta at en linje gjennom O skjærer α i P og P' der $P \neq P'$ slik at $(OP)(OP') = r^2$. Tegn figur og bevis at da må sirklene α og γ stå vinkelrett på hverandre

Oppgave 4 (HYPERBOLSK GEOMETRI)



a) Hva forstår man ved en Saccheri-firkant? Hva kan sies om toppvinklene $\angle ADC$ og $\angle BCD$? Er en Saccheri-firkant et parallellogram?
(De to siste svarene skal ikke begrunnes!)

b) Bevis følgende: Når l og m er to forskjellige linjer og P er et punkt på m, så finnes det høyst et punkt Q på m, $Q \neq P$, som er slik at

$$d(P, l) = d(Q, l)$$