Norges teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA2401 Geometri
Vår 2007

Faglig kontakt under eksamen:
Johan Aarnes (920 80 614)

EKSAMEN I MA2401 GEOMETRI
Fredag 18. mai 2007
Tid: 09:00 - 13:00 Sensur 8. juni 2007

Hjelpemidler:
Passer og linjal.
Oppgavesettet består av to sider pluss et vedlegg med figurer til oppgave 3 og 5.

1 Gi en beskrivelse av hva som ligger i begrepene *nøytral geometri*, *euklidsk geometri* og *hyperbolsk geometri* og hva som skiller dem.

2

a) Formuler kongruenssetningene (ingen bevis). Hvilken av disse setningene tas som aksiom?

b) La $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ være rettvinklede trekanter, der vinklene ved hjørnene C og F er rette. Anta at $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ og $\overline{AC} \cong \overline{DF}$. Vis at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASS for rettvinklede trekanter).

3 Dette er en oppgave i nøytral geometri.

a) La $\triangle ABC$ være en trekant, og la M, N betegne midtpunkt på $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, respektive. La D være fotpunkt fra normalen fra B på $\overleftrightarrow{MN}$ og la E være fotpunkt for normalen fra A på $\overleftrightarrow{MN}$ (se figur bakerst i oppgavesettet). Vis at $\square ABDE$ er en Saccheri-firkant.

b) Anta at $\triangle ABC$ er spissvinklet og at $\square ABDE$ er konstruert som ovenfor. Vis at $\triangle ABC$ og $\square ABDE$ er disseksjonsekvivalente (equivalent by dissection), i.e. $\triangle ABC \equiv \square ABDE$.

4 Dette er en oppgave i euklidsk geometri. La γ være en sirkel og A et punkt som ikke ligger på γ.

a) Hva menes med A's potens med hensyn på γ (power of A with respect to γ) ?

b) Anta at sirkelen γ har senter O og radius lik 1. La $OA = \frac{3}{2}$ og konstruer (passer og linjal) en sirkel α med senter i A og som er ortogonal på γ, i.e. $\alpha \perp \gamma$. (Du må starte med å konstruere sirkelen γ ved å velge et senter O og en passende radius. Lengden på den setter du lik 1.) Beregn radius i sirkelen α.

$\boxed{5}$ Dette er en oppgave i hyperbolsk geometri. Den gjør bruk av begreper fra euklidsk geometri. La $\gamma = C(O, 1)$ være en sirkel som definerer Poincare-modellen for hyperbolsk geometri, dvs. $\mathbf{H} = \{P : OP < 1\}$.

a) La β være en sirkel med senter i O og radius $r < 1$. Vis at β også er en hyperbolsk sirkel med senter i O og radius r_1 gitt ved

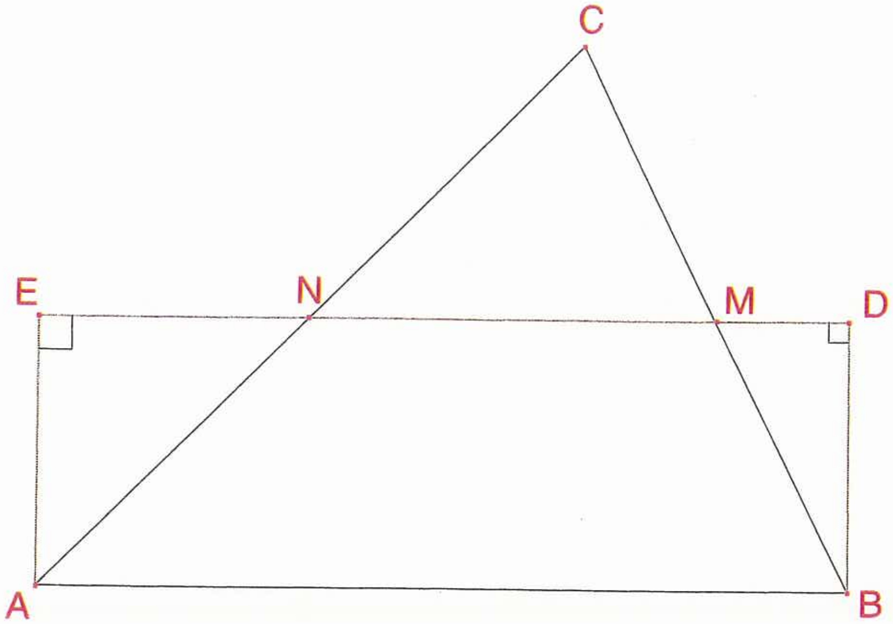
$$r_1 = \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

b) La α være en sirkel som er ortogonal på γ. La I_α betegne inversjon med hensyn på α, dvs.

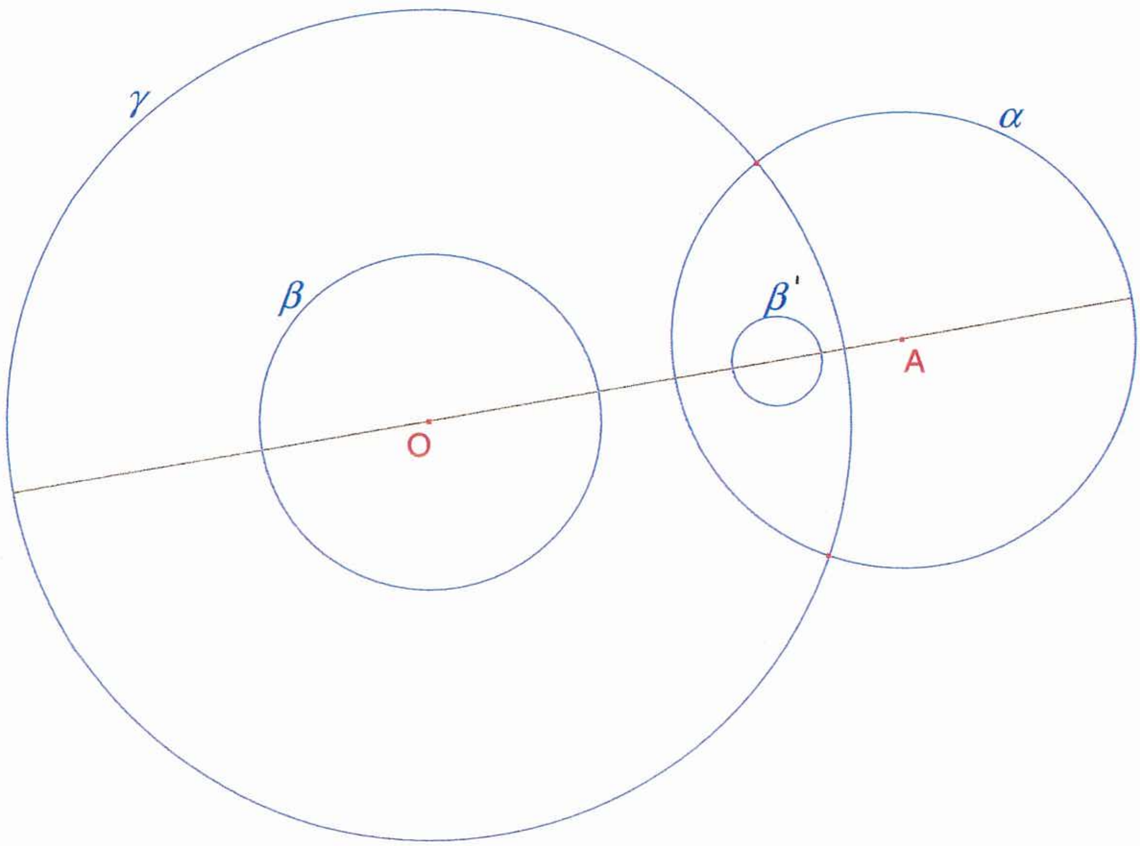
$$P' = I_\alpha(P) = \frac{a^2}{AP}; \; P \in \mathbf{H},$$

der a er radius og A er senter i α (se figur bakerst i oppgavesettet). La β være gitt som ovenfor. Da er $\beta' = I_\alpha(\beta) \subseteq \mathbf{H}$ en sirkel (trenger ikke vises). Konstruer sirkelen β' (Her må du først konstruere en sirkel α ortogonal på γ. Har du gjort konstruksjonen i oppgave 4b) kan du bygge videre på den.)
Sett $r = \frac{1}{2}$ og $OA = \frac{3}{2}$ og beregn radius i sirkelen β'.

c) Vis at β' er en hyperbolsk sirkel med senter i $O' = I_\alpha(O)$. Beregn den hyperbolske radius i β'.



Figur til oppgave 3



Figur til oppgave 5