Exam MA2401 og MA6401, 4.5.2020

Sanne eller gale utsagn

Avgjør om de følgende påstandene er sanne eller gale i de diverse geometriene. Du får +1 poeng for et korrekt svar, -1 for et ukorrekt svar, og 0 poeng dersom du ikke velger noen av de to alternativene (altsåingen stillingtagen). For hver gruppe får du minst 0 poeng (dvs. du vil ikke fånegative poeng i noen gruppe).

Gruppe 1, Nøytral Geometri

a) En Saccheri firkant er et parallellogram.

b) I et parallellogram er motsatte sider like lange.

c) En Lambert firkant kan ikke være en Saccheri firkant.

d) En Saccheri firkant kan være en Lambert firkant.

e) En Lambert firkant er et parallellogram.

Gruppe 2, Nøytral Geometri

a) Hver trekant har en innskreven sirkel.

b) Ingen trekant har en omskreven sirkel.

c) En trekant har en vinkelsum på 180° hvis og bare hvis den har en omskreven sirkel.

d) Dersom get eksisterer en trekant med vinkelsum 180°, så vil alle trekanter ha en omskreven sirkel.

e) I visse nøytrale geometrier finned det trekanter med vinkelsum 180° og trekanter med vinkelsum mindre enn 180°.

Group 3 Euklidisk Geometri

a) Sentroiden til en trekant ligger alltid inne i trekanten.

b) Ortosentret til en trkant ligger alltid inne i trekanten.

c) Sentroiden og ortosentred til en trekant faller sammen hvis og bare hvis trekanten er likesidet.

d) Omsentret og sentroiden og ortosentret ligger på samme linje.

e) Omsentret og sentroiden og ortosentret ligger på samme linje hvis og bare hvis trekanten er likesidet.

Gruppe 4, Hyperbolisk Geometri

a) En Lambert firkant kan også være en Saccheri firkant.

b) En Saccheri firkant kan ikke være en Lambert firkant.

c) En Saccheri firkant er et parallellogram.

d) Motsatte sider i en Saccheri firkant har en felles perpendikulær.

e) En Lambert firkant er et parallellogram.

1 Nøytral Geometri (2+1+2=5 poeng)

Definer avstanden mellom to punkter (x_1, y_1) og $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ved

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

(her betegner $max\{a, b\}$ det største av to relle tall a og b.)

a) Verifisér at D definerer en metrikk (*kvadratmetrikk*).

b) Finn alle punktene (x, y) i $\mathbb{R}^2$ slik at $D((0, 0), (x.y)) = 1$. Tegn en figur i det kartesiske plan. (Dette skulle forklare navnet *kvadratmetrikk*).

c) La l vare en linje definert ved ligningen $y = m \cdot x + b$, med $m, b \in \mathbb{R}$. Vis at dersom $|m| \geq 1$, så vil funksjonen $f : l \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = m \cdot x$ definere en koordinatfunksjon ved å bruke kvadratmetrikken.

2 Euklidsk Geometri (2+2+2+2=8 poeng)

En likesidet trekant er en trekant med tre sider av samme lengde.

a) Bevis at en euklidsk trekant er likesidet hvis og bare hvis hver av vinklene er 60 grader.

b) Bevis at det eksisterer en likesidet trekant i euklidsk geometri.

c) Splitt en likesidet trekant i midtpunktet av en side for å bevise at det finnes en trekant med vinkler $30°, 60°$ og $90°$.

d) Bevis at i en trekant med vinkelmål $30°, 60°$ og $90°$, så vil lengden av siden motsatt vinkelen på $30°$ vare halvparter av lengden av hypotenusen.

3 Hyperbolsk Geometri (3+3=6 poeng)

La $\triangle ABC$ vare en trekant og la D, E og F vare midtpunktene til henholdsvis sidene $\overline{BC}, \overline{AC}$ og $\overline{AB}$.

a) Bevis at $\triangle EDC$ ikke er likedannet med $\triangle ABC$.

b) Bevis at kongruensene $\overline{AF} \cong \overline{ED}$, $\overline{AE} \cong \overline{FD}$ og $\overline{BD} \cong \overline{EF}$ ikke alle kan holde.

4 Nøytral Geometri (3+3=6 poeng)

a) La a og c være to tall slik at $0 < a < c$. Bevis at det eksisterer en trekant $\triangle ABC$ slik at $\angle BCA$ er en rett vinkel, $BC = a$ og $AB = c$.

b) La γ være en sirkel og la P være et punkt utenfor γ. Bevis at det eksisterer to linjer gjennom P som er tangenter til γ.