Oppsummering

Hva? Aksiomatisk oppbygging av plangeometri

Et aksiomatisk system består av:

1. udefinerte begrep
2. aksiomer / postulater
3. definisjoner
4. teoremer og bevis
5. tolkninger og modeller

eksistens av en modell gjør det aksiomatiske systemet konsistent → ↑ hvis aksiomene er "riktige" i tolkningen

Eksempel: Insidensgeometri

1. punkt, ligge på, linje
2. I61 Gjennom to distinkte punkt går eksakt én linje.

   I62 Hver linje går gjennom minst to punkt.

   I63 Det finnes tre ikke-kollineære punkt.
3. l og m er parallelle dersom $l \cap m = \emptyset$
4. Hvis l og m ikke er parallelle, så $\exists$ et unikt punkt P s.a. $l \cap m = \{P\}$.
5. Tre-punktsgeometrien, kartesiske planet,

men ikke sfæren.

Nøytralgeometri

Udefinerte begrep: punkt, linje, avstand, halvplan og vinkelmål

$\mathbb{P}$ - mengden av alle punkt i planet

Aksiomer

NG1 Eksistenspostulatet - Det finnes minst to punkt.
NG2 Insidens post. - Gjennom to distinkte punkt går eksakt en linje.
NG3 Linjalpost. - Enhver linje har en koordinatfunksjon.
NG4 Planseparasjonspost. - Enhver linje deler planet i to.
NG5 Gradskive post. - Vi kan måle vinkler
NG6 SVS - Lik side-vinkel-side gir kongruente trekanter.

NG3 Linjalpostulatet
Gitt $P, Q \in \mathbb{P}$, så finnes et reelt tall PQ, kalt avstanden mellom P og Q.
For hver linje så eksisterer det en

koordinatfunk. $f: l \to \mathbb{R}$ s.a. f er en 1-1 korrespondanse og

$PQ = |f(P) - f(Q)|$ for $P, Q \in l$.

kan normaliseres: $P, Q \in \mathbb{P}$, $\exists$

$f: \overleftrightarrow{PQ} \to \mathbb{R}$ s.a. $f(P) = 0$, $f(Q) > 0$.

Nå kan vi definere

- $A * B * C \iff AB + BC = AC$
- $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P \mid A * P * B\}$
- $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P \mid A * B * P\}$
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ betyr $AB = CD$

og konstruere

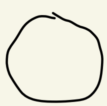
- midtpunktet på $\overline{AB}$
- P på $\overrightarrow{AB}$ i gitt avstand fra A.

NG4 Plansep. post.

$\mathbb{P} = H_1 \cup l \cup H_2$, hvor

- $H_1 \neq \emptyset$, $H_2 \neq \emptyset$
- Hvis $P \in H_1$, $Q \in H_2$, så $\overline{PQ} \cap l \neq \emptyset$.

H_1 og H_2 er de to sidene av l, begge konvekse.

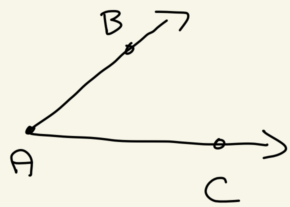


konveks

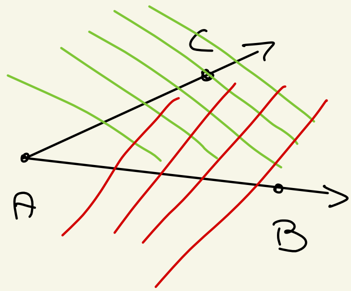
ikke-konveks

Kan nå definere vinkel

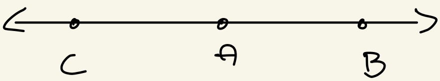
$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$



Def.
Det indre av en vinkel : $H_C \cap H_B$

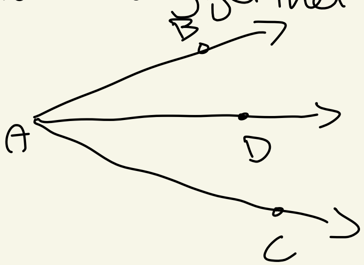


Def.
Motsatte stråler :
$B * A * C$
$\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er motsatte stråler.



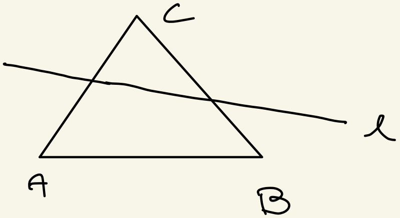
Def. Trekant :
$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ (A, B, C ikke-kollineære)

Def.
Mellomliggenhet av stråler :



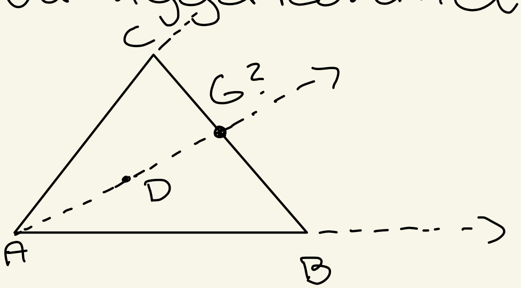
Dersom D er i det indre av $\angle BAC$.

Pasch's aksiom (teorem)
A, B, C ikke på l.



krysser l en av sidene, må den krysse en av de andre.

Tverrliggerteoremet



$\exists$ G s.a. $G \in \overrightarrow{AD}$ og $G \in \overline{BC}$.

NG5 Gradskivepost.

1. $0° \le m(\angle ABC) < 180°$
2. $m(\angle ABC) = \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
3. Vi kan konstruere vinkler med gitt mål $r°$, $0 \le r < 180$:
   For hver $0 \le r < 180$ og halvplan H (begrenset av $\overleftrightarrow{AB}$) så $\exists$ en entydig stråle $\overrightarrow{AE}$ s.a. $E \in H$ og $m(\angle BAE) = r°$.
4. Vi kan addere vinkler:
   $$m(\angle BAD) + m(\angle DAC) = m(\angle BAC)$$
   når $\overrightarrow{AD}$ mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

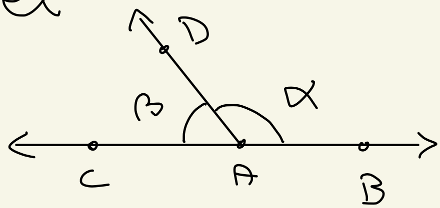
Kongruente vinkler (def)

$\angle BAC \cong \angle DEF$ betyr $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle DEF)$.

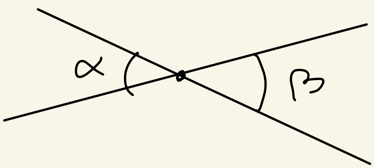
Konsekvenser:

- Lineært-par-teoremet

$\alpha + \beta = 180°$



α, β et lineært par.

- konstruksjon av midtnormal på $\overline{AB}$
- vinkelhalveringsstråler
- 

motsatte vinkler er kongruente
$\alpha = \beta$.

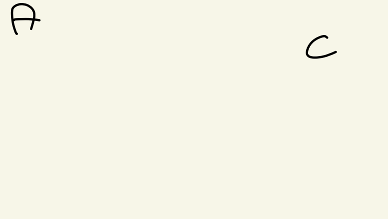
- kontinuitetsaksiomet

$f : [0, d] \to [0, \mu(\angle CAB)]$ $d = CB$

$f(x) = \mu(\angle CAD_x)$

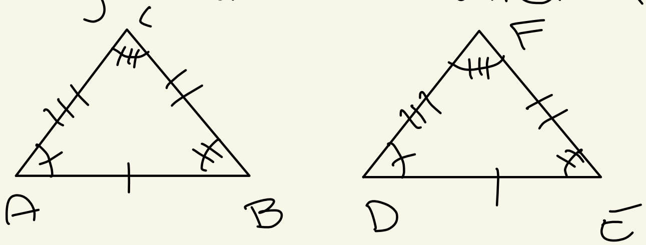
er kontinuerlig.

Det er også den inverse.



NG6 SVS postulatet

Kongruente trekanter (def)



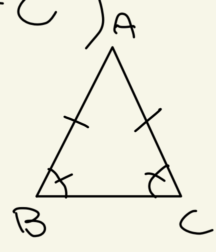
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

SVS

Dersom ΔABC, ΔDEF er s.a.
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ og $\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
så $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Husk: Vinkelen må ligge mellom de to sidene.

Likebeint trekant ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$)
$\Rightarrow \angle ABC \cong \angle ACB$
(ved SVS)

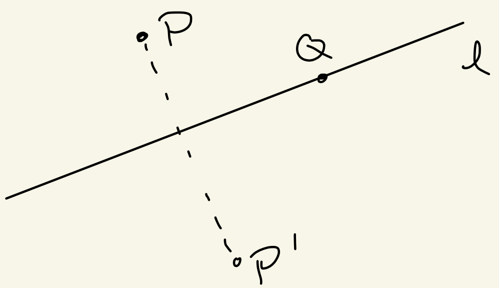


Har VVS, VSV, SSS.

VSS er feil, men RSS er riktig.

Kunne byttet ut SVS med:

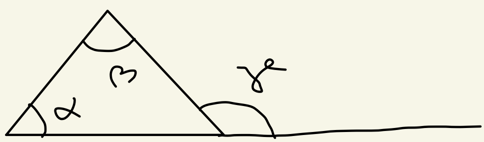
For hver linje finnes en vinkel-bevarende isometri som bytter om de to sidene og fikserer hvert punkt på linjen.



(Refleksjonen ρ_l)

Delkap. 10.5

Ytre-vinkel-teoremet



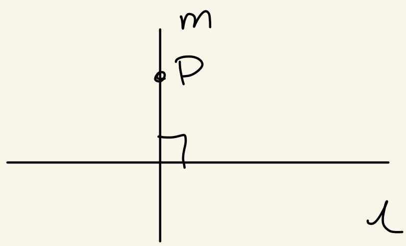
$\gamma > \alpha, \beta$

(Funker ikke på sfæren)

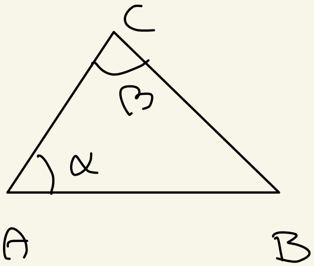
Teorem

Gitt P og l så $\exists!\, m$ s.a

$P \in m$ og $m \perp l$

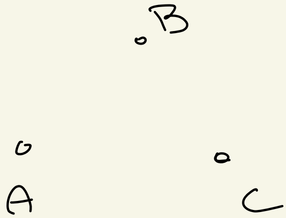


Skalene-ulikheten



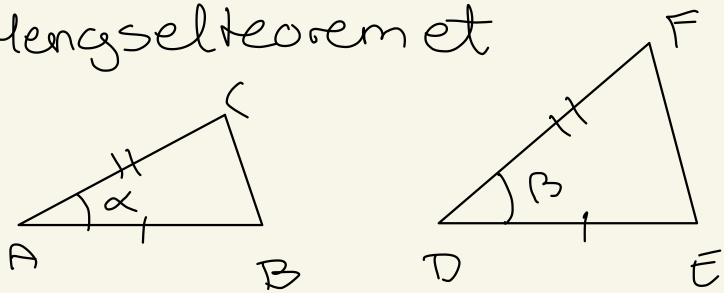
$$AB > BC \iff \beta > \alpha$$

Trekantulikheten

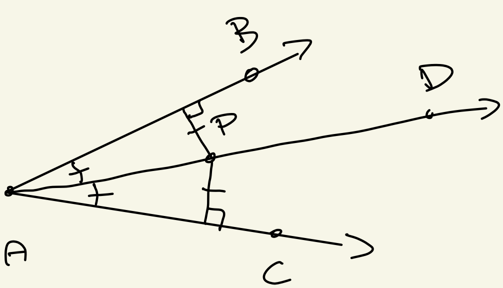


$$AC < AB + BC$$

Hengselteoremet



Hvis $\beta > \alpha$,
$FE > CB$



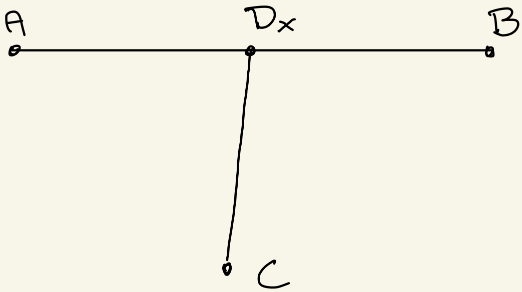
$\overrightarrow{AD}$ er vinkel-halveringsstrålen

$P \in \overrightarrow{AD}$ hviss

$$d(P, \overleftrightarrow{AC}) = d(P, \overleftrightarrow{AB})$$

Kontinuitet av avstand

$d = AB$, $x = AD_x$

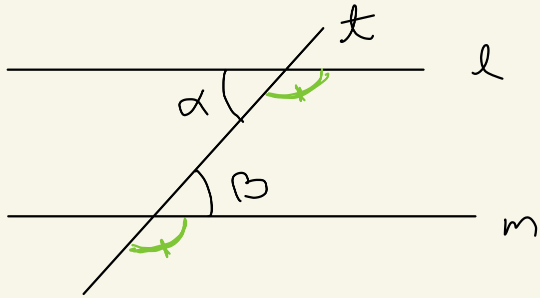


$f: [0,d] \to [0,\infty)$

$f(x) = CD_x$

er kontinuerlig.

AIVT - Alternerende indre vinkel teorem



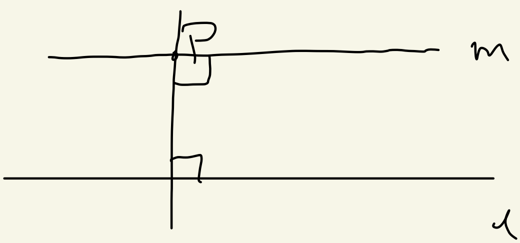
$\alpha = \beta \Rightarrow l \parallel m$

Korollar: korresponderende vinkler like store

$\Rightarrow l \parallel m$.

Eksistens av paralleller:

Gitt $P \notin l$, så eksisterer m s.a. $P \in m$ og $m \parallel l$.



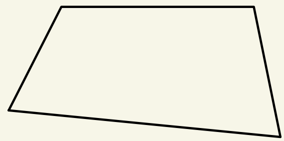
$m \parallel l$ fra AIVT.

Saccheri-Legendre teoremet

$\sigma(\triangle ABC) \leq 180^\circ$

Firkanter

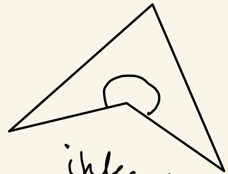
konveks



Konveks firkant $\square ABCD$

$\sigma(\square ABCD) \leq 360^\circ$

når $\square ABCD$ konveks.



ikke-konveks

Parallellogram

parallelle sider (disse er alltid konvekse)

Rektangel

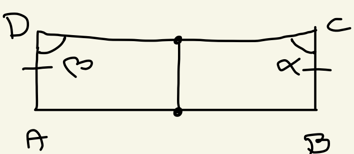
alle vinkler måler 90°.

Defekt (def.)

$\delta(\triangle ABC) = 180^\circ - \sigma(\triangle ABC)$

$d(\square ABCD) = 360^\circ - \sigma(\square ABCD)$

Saccheri-firkant



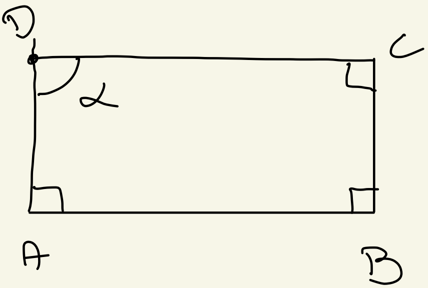
Egenskaper (teorem)

- $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
- $\alpha = \beta$
- Midtsegmentet er normalt

på $\overline{AB}$ og $\overline{DC}$

- er et parallellogram
- konveks
- $\alpha, \beta \leq 90^\circ$

Lambert-firkant

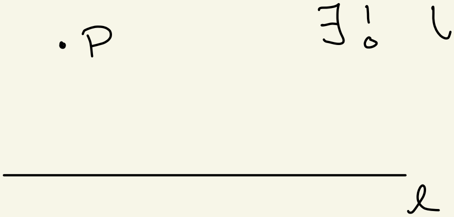


Egenskaper: (teorem)

- parallellogram
- konveks
- $\alpha \leq 90^\circ$
- $BC \leq AD$

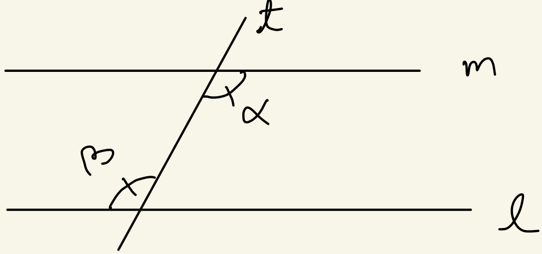
Utsagn som er ekvivalente til EPP

EPP



$\exists!$ linje m s.a. $P \in m$ og $m \parallel l$

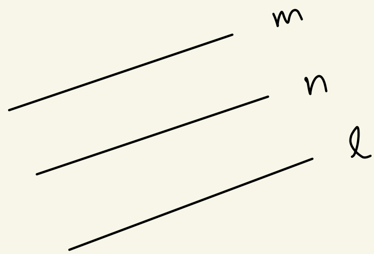
- MAIVT



Hvis $m \parallel l$, så $\alpha = \beta$

- Transitivitet av $\parallel$

$m \parallel n$, $n \parallel l$, så $m \parallel l$

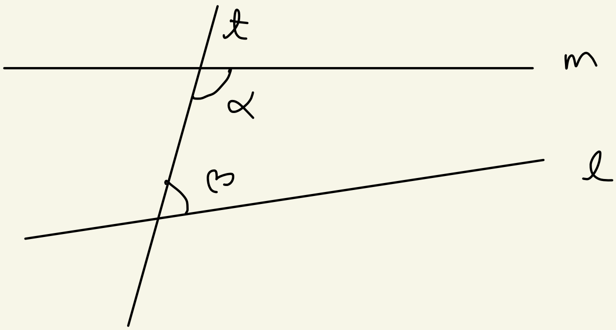


- Vinkelsumspostulatet

$\sigma(\triangle ABC) = 180°$ for alle trekanter.

- $\sigma(\triangle ABC) = 180°$ for en trekant

- Euklids V

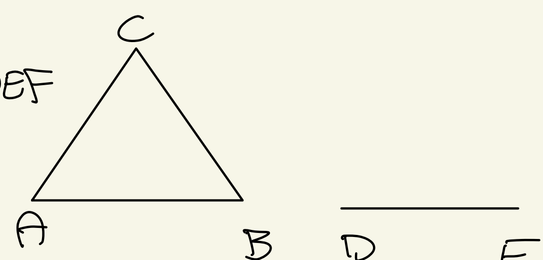


$\alpha + \beta < 180°$, så vil m og l krysse på den siden hvor $\alpha + \beta < 180°$.

- $l \parallel m$. Hvis $t \cap l = \{P\}$, så $t \cap m \neq \emptyset$.

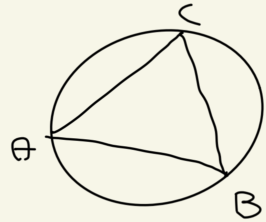
- Walli's postulat

$\exists$ F s.a. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



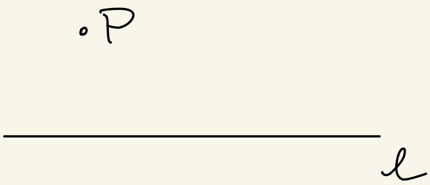
- Det eksisterer rektangel

- Hver trekant kan omskrives (det eksisterer en omsirkel til hver trekant) Teorem 8.2.3.



HPP (hyperbolske)

Det eksisterer minst to linjer m, n s.a. $P \in m$, $P \in n$ og $m \parallel l$, $n \parallel l$.



Det universale hyperbolske teorem

Dersom $\exists\ l_0, P_0$, og minst to linjer gjennom P_0 som er parallelle til l_0, så gjelder det for alle l og P.

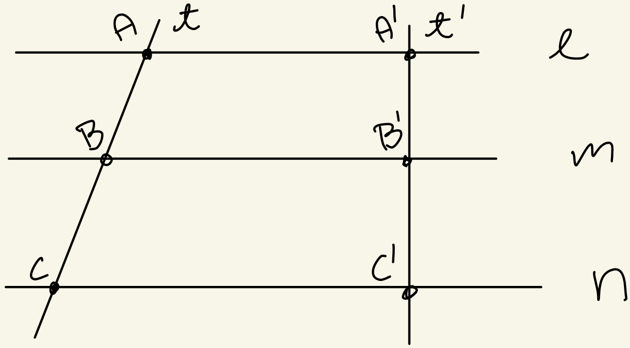
$$HPP = \neg EPP$$

Den ene eller den andre holder i nøytralgeometri.

Euklidsk geometri

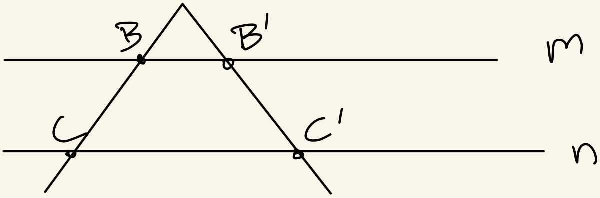
Aksiomene NG1 – NG6 + EPP

Parallellprojeksjonsteoremet



$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

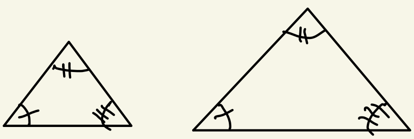
$A = A'$



$m \parallel n$ gir

Fundamentalteoremet for formlike trekanter

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$



Med andre ord:

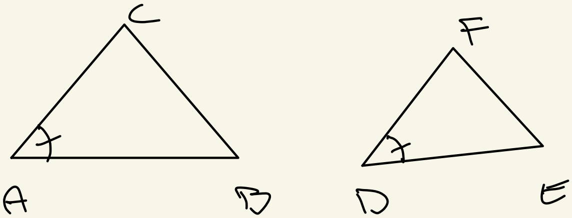
$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \exists\, r > 0$ s.a.

$DE = r \cdot AB$

$DF = r \cdot AC$

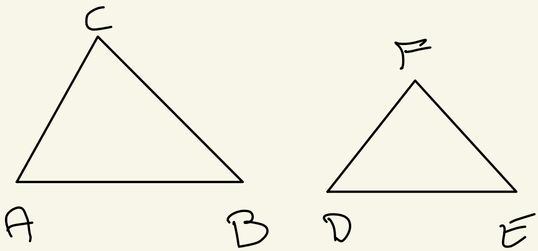
$EF = r \cdot BC$

SVS for formlikhet:



$$+ \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

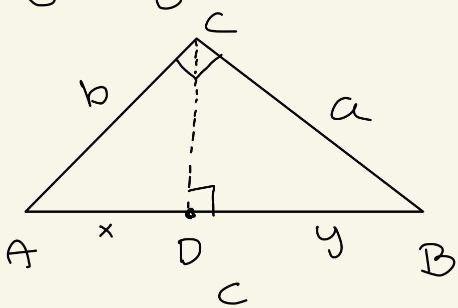
$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

så $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Pytagoras teorem

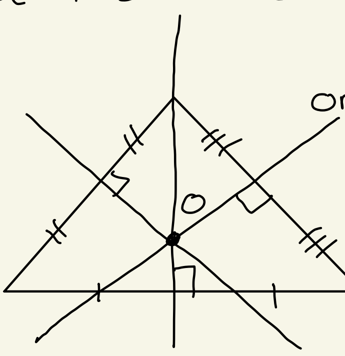


$$a^2 + b^2 = c^2 \leftarrow$$

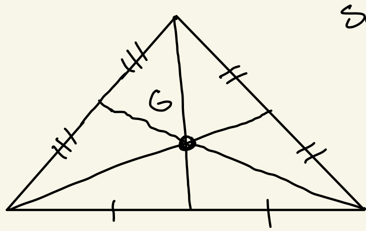
Bevis: Danner tre formlike trekanter

$\Delta ABC \sim \Delta CBD \sim \Delta ACD$

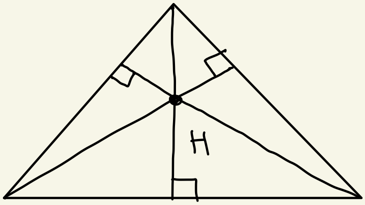
$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \angle BCA \text{ måler } 90^\circ$$



omsenter
O



sentroide
G



ortosenter

H

Teorem 5.6.3 (Eulerlinjeteoremet)

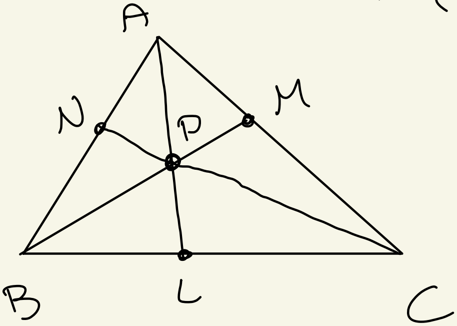
O, G og H er kollineære.

Videre, $H * G * O$, og

$HG = 2GO$.

Hvis trekanten er likesidet, er $H = G = O$.

Teorem 5.64 (Ceva's teorem)



Linjene $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ og $\overleftrightarrow{CN}$ vil møtes i et felles punkt P hviss

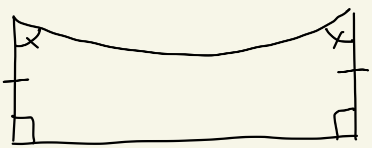
$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Hyperbolsk geometri

NG1 - NG6 + HPP

Det eksisterer minst to linjer som er parallelle til l og går gjennom P.

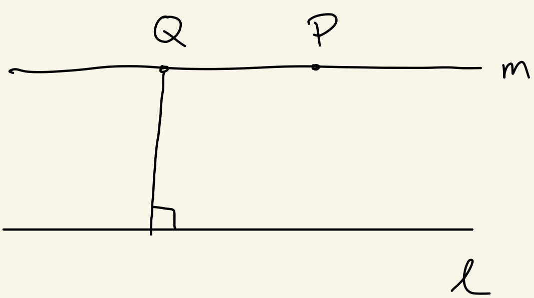
HPP $= \neg$ EPP, så

- $\sigma(\triangle ABC) < 180°$
- $0 < \delta(\triangle ABC) < 180°$
- $\sigma(\square ABCD) < 360°$ ←
- Det eksisterer ikke rektangler.
- 

Toppvinklene i Saccheri-firkanten måler $< 90°$

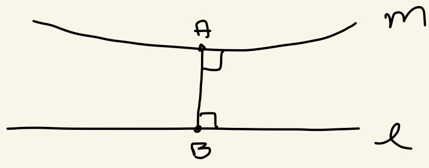
Teorem 6.1.11 VVV

$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF$

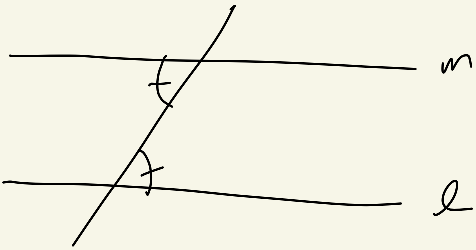


Gitt $P \notin l$, $P \in m$, så finnes det høyst et punkt $Q \neq P$ s.a. $d(P,l) = d(Q,l)$

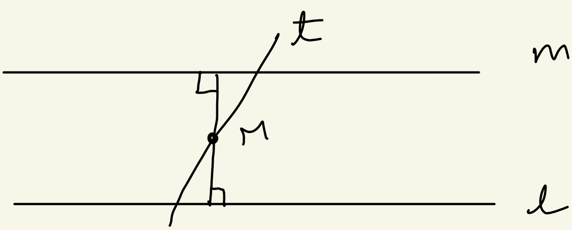
Def. Fellesnormal →
$\overline{AB}$ er en fellesnormal



Dersom l og m er parallelle linjer og $\exists$ $P, Q \in m$, $P \neq Q$, s.a. $d(P,l) = d(Q,l)$, så har m og l en fellesnormal.



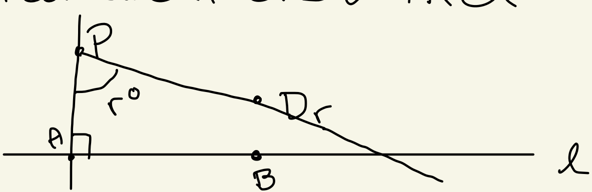
MAIVT **kun** i spesielle tilfeller.



$m \parallel l$

Alternerend indre vinklene er kongruente dersom $\exists$ en fellesnormal (FN) s.a. FN skjærer t i midten av FN (punktet M).

Parallellitetsvinkel

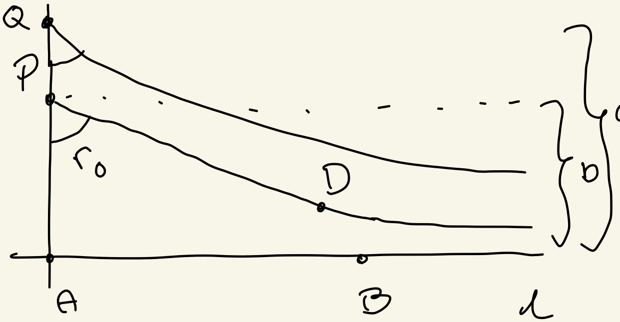


$K = \{ r \mid \overrightarrow{PD_r} \cap \overrightarrow{AB} \neq \emptyset \}$

Den snittende mengden

$K = [0, r_0)$, r_0 er det kritiske tallet for P og $\overrightarrow{AB}$ (*)

Det kritiske tallet r_0 avhenger bare av avstanden $d(P, \ell)$



$K(x) = \mu(\angle APD)$

$x = d(P, \ell)$

$K(x)$ er en ikke-økende funksjon

$K(b) \geq K(a)$.

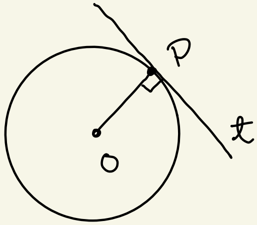
(*) $\angle APD$ s.a. $\mu(\angle APD) = r_0$ kalles parallellitetsvinkelen.

Hver parallellitetsvinkel måler $< 90°$.

Sirkler (i nøytralgeometri)

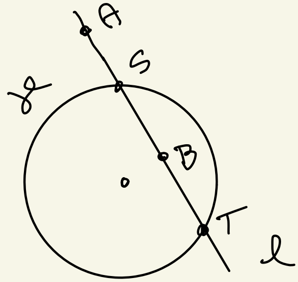
NG1 – NG6

$C(O, r) = \{P \mid OP = r\}$



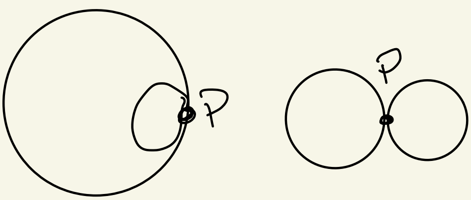
Tangentlinjeteoremet

t er tangent ved P hviss $\overleftrightarrow{OP} \perp t$



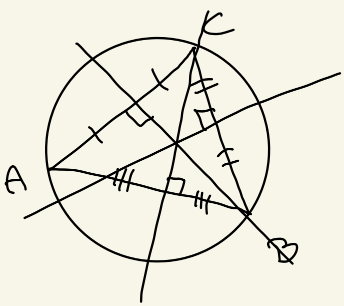
Sirkulær kontinuitet;

Hvis $A, B \in l$ er s.a. A er på utsiden γ og B er på innsiden av γ, så må l være en sekantlinje.



Tangentsirkler

Omsirkelteoremet

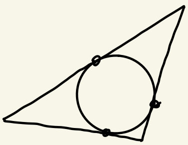


Har Omsirkel til ΔABC hviss halveringsnormalene til sidene møtes i O (som også er sentrum i omsirkelen)

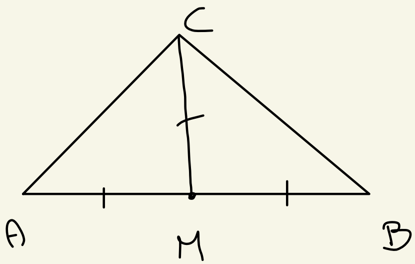
Eksistensen av omsirkel for alle trekanter er ekvivalent EPP.

$\exists$ trekanter som ikke har en omsirkel i hyperbolsk geometri.

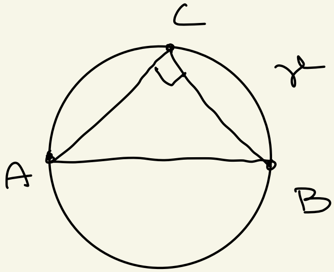
Men, en innsirkel eksisterer for alle trekanter i nøytral geometri



Sirkler i Euklidsk geometri



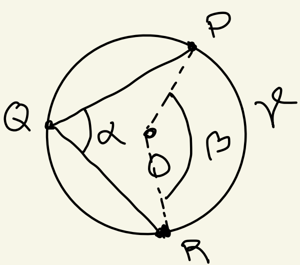
$$\angle ACB = 90^\circ$$
$$\Updownarrow$$
$$AM = MC$$



Hvis $A, B, C \in \gamma$ s.a. $\overline{AB}$ er en diameter i γ, så

$$\angle ACB = 90^\circ$$

Periferivinkel $\angle PQR$

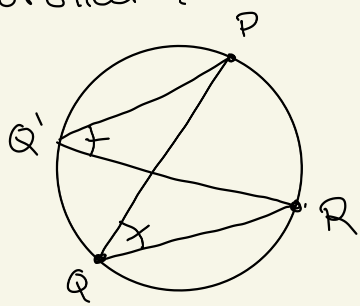


Sentralvinkel $\angle POR$

Sentralvinkelen til γ måler 2 ganger målet til periferivinkelen

$\beta = 2\alpha$

Korollar:



$\angle PQ'R \cong \angle PQR$

Kap. 10 og 11 er det så kort tid siden vi gjennomgikk, så de ble ikke tatt med i oppsummeringen.