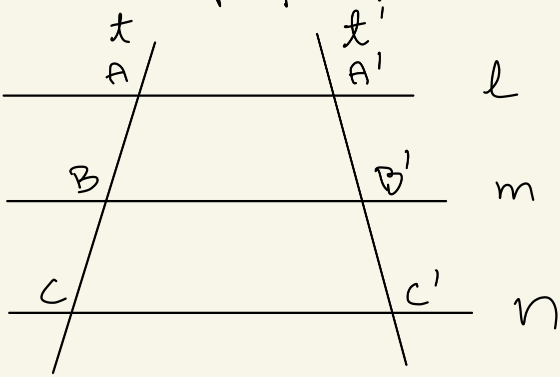
I går: 28/2

Parallellprojeksjonsteoremet



$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

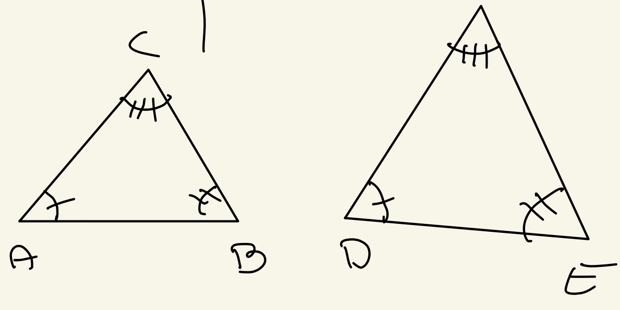
I dag

5.3 Formlike trekanter

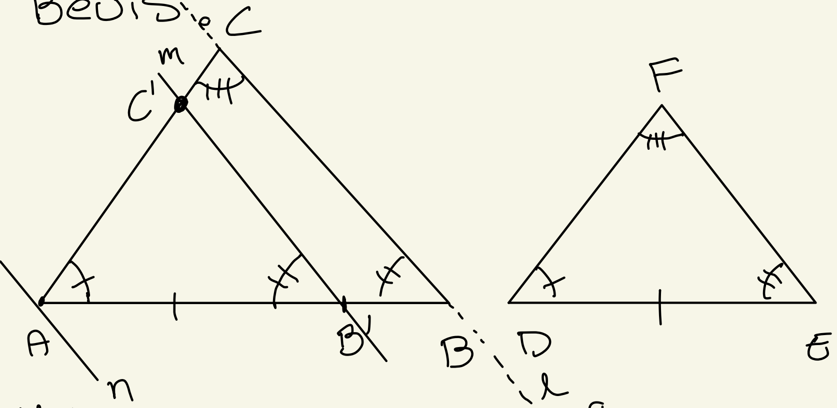
Teorem 5.3.1 (Fundamentalteoremet for formlike trekanter)

Dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter s.a. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, så

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}.$$



Bevis:



Hvis $AB = DE$, så folger $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ fra VSV og resultatet folger.

Vi antar $AB \neq DE$, så $AB > DE$ eller $AB < DE$. Fiks notasjon s.a. $AB > DE$.

Velg B' på $\overline{AB}$ slik at $AB' = DE$.

La m være linjen gjennom B' s.a. $m \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Kall $\overleftrightarrow{BC} = l$. La C' være det punktet hvor m skjærer $\overline{AC}$ (eksisterer av Pach's aksiom).

Da er $\triangle AB'C' \cong \triangle DEF$ (MAIVT og VSV).

La n være linjen gjennom A s.a. $n \parallel m$ og $n \parallel l$.

Da gir PPT at $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$

$$\iff \frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC}.$$

$\square$

En annen måte å se teoremet på:

Korollar 5.3.2

Dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter s.a. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, så eksisterer det er positivt tall r slik at

$DE = r \cdot AB$, $DF = r \cdot AC$ og $EF = r \cdot BC$.

Teorem 5.3.4

Dersom to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ slik at $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, så

er $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

(Hviss betingelse)

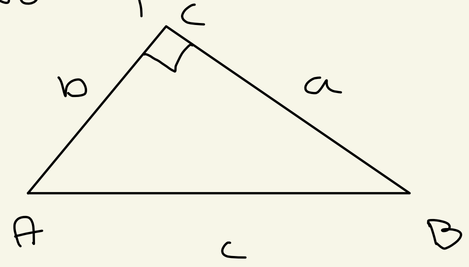
Teorem 5.3.3 (SVS formlikhetsbetingelse)

Hvis $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter s.a. $\angle CAB \cong \angle FDE$ og

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \text{ da er } \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

5.4 Pytagoras teorem

Notasjon



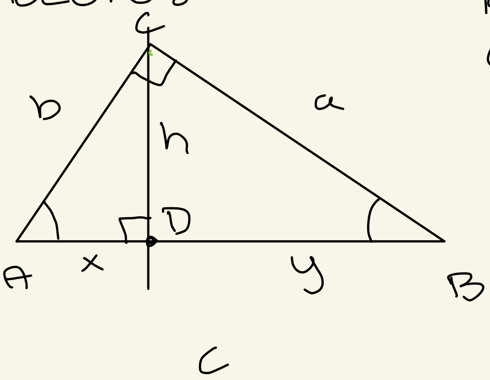
$a = BC$

$b = AC$

$c = AB$

Teorem 5.4.1 (Pytagoras)
Dersom $\triangle ABC$ er en rettvinklet trekant med rett vinkel i hjørnet C, da er $a^2 + b^2 = c^2$.

Bevis:



Konstruer en normal fra C ned på $\overleftrightarrow{AB}$ og kall krysningspunktet D. Fra lemma 4.8.6 så vet vi at D er i det indre av $\overline{AB}$.

Vi har

$$\mu(\angle A) + \mu(\angle B) = 90^\circ$$

og $\mu(\angle A) + \mu(\angle ACD) = 90^\circ$

(Vinkelsumteoremet). Det følger at $\angle ACD \cong \angle B$. På samme vis, $\angle DCB \cong \angle A$. Så vi har tre formlike trekanter: $\Delta ABC \sim \Delta CBD \sim \Delta ACD$.

La $x = AD$, $y = BD$, $h = CD$.

Teorem 5.3.1 to ganger gir:

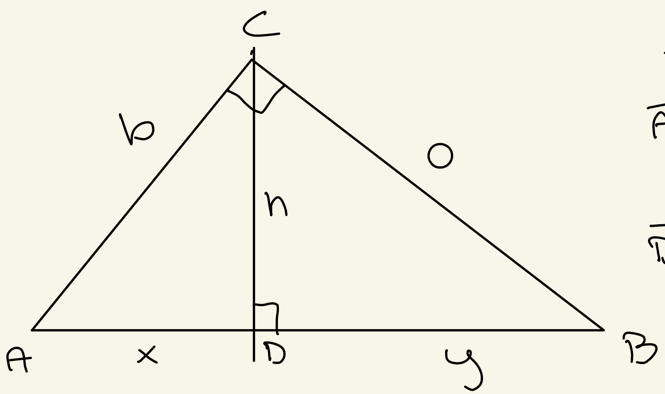
$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c}, \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{c}, \quad \text{så}$$

$$b^2 = xc \quad \text{og} \quad a^2 = c \cdot y, \quad \text{og}$$

$$a^2 + b^2 = c(x+y) = c^2.$$

$\square$

Terminologi



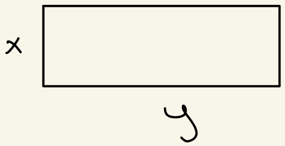
h - høyden

$\overline{AD}$ - projeksjon av $\overline{AC}$ ned på $\overline{AB}$

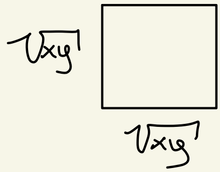
$\overline{DB}$ - projeksjon av $\overline{BC}$ ned på $\overline{AB}$.

Def:

Geometrisk gjennomsnitt av to tall $x, y \geq 0$ er $\sqrt{x \cdot y}$.



areal $x \cdot y$, når det samme arealet som kvadratet



To geometrisk gjennomsnittlige teorem:

Teorem 5.4.3
Høyden i en rettvinklet trekant er det geo. gjennomsnittet av lengdene av projeksjonene til de to katetene.
$(h = \sqrt{x \cdot y})$.

Teorem 5.4.4
Lengden av en katet i en rettvinklet trekant er det geo. snittet av lengden til hypotenusen og lengden til projeksjonen av kateten ned på hypotenusen.

(Over: $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$)

Teorem 5.4.5
Dersom $\triangle ABC$ er en trekant s.a. $a^2 + b^2 = c^2$, da måler $\angle BCA$ $90°$.

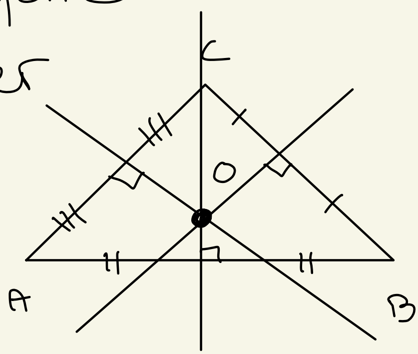
Kap. 5.5 Trigonometri
- Fundamentet kommer fra Pytagoras teorem og Fundamentalteoremet for formlike trekanter.

Kap. 5.6 handler om å utforske egenskaper ved trekanter ved hjelp av GeoGebra.

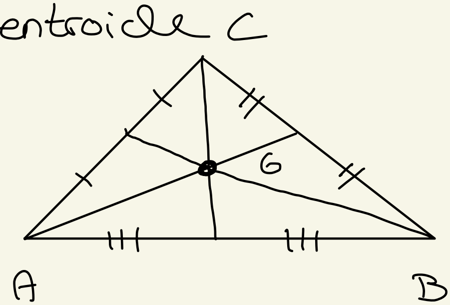
Vi ser på noe av det som står der:

Definisjoner

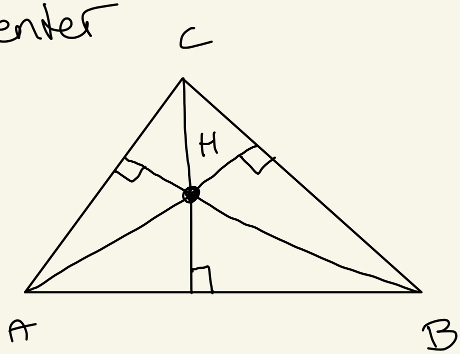
omsenter



Sentroide



ortosenter



Teorem 5.6.3 (Eulerlinje-teoremet).
De tre punktene O, G og H er kollineære.
Videre, $H * G * O$ og $HG = 2 \cdot GO$.
Dersom trekanten

er likesidet vil $H = G = O$.

Teorem 5.6.4 (Ceva's teorem)
La ΔABC være en trekant.
Da vil Ceva-linjene $\overleftrightarrow{AL}$, $\overleftrightarrow{BM}$ og $\overleftrightarrow{CN}$ møtes i et felles punkt P hviss

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$