27/2

Forrige uke:

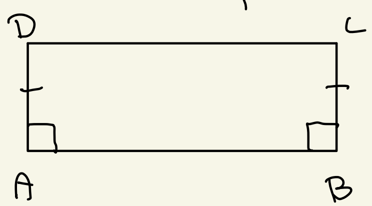
- 4.8 Rektangler og defekt

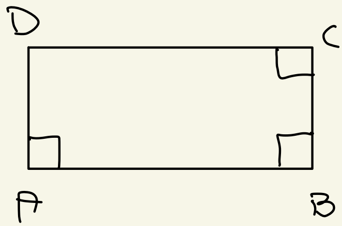
↑ hver vinkel i en firkant måler 90°.

$\delta(\triangle ABC) = 180^\circ - \sigma(\triangle ABC)$

(og tilsvarende for konvekse firkanter).

- Det eksisterer rektangel hviss det eksisterer en trekant med defekt 0°.
- Dersom det eksisterer en trekant med defekt 0° i en modell for nøytral geo., så har alle trekanter defekt 0° i den modellen.
- Saccheri firkanter og Lambert firkanter




- Det universale hyperbolske teoremet

flere parallelle linjer til $l_0$ gjennom $P_0$

$\Rightarrow$ flere parallelle linjer for alle $l$ og $P$.

Dette er en negasjon av EPP.
I enhver modell i nøytral geometri holder enten EPP eller HPP
Euklid hyperbolsk

- startet på kap. 5: Euklidsk geometri

Teorem 5.1.9 (Clairut's teorem)
Det eksisterer et rektangel.

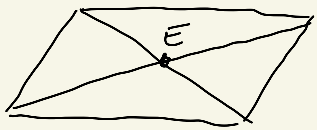
(Alle Sacchere og Lambert firkanter er rektangler i Euklidsk geometri.)

Teorem 5.1.10 (Egenskaper ved Euklidske parallellogram)
Dersom □ABCD er et parallellogram, så vil

1. diagonalene dele □ABCD i par av kongruente trekanter: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ og $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

2. de motsatte sidene være kongruente,
3. de motsatte vinklene være kongruente,

4. diagonalene halverer hverandre.



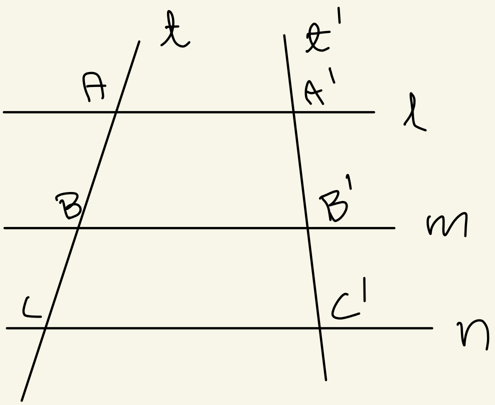

(E er midtpunktet på begge diagonalene.)

## 5.2 Parallellprojeksjonsteoremet (PPT)

(Vi bygger oss opp mot Pytagoras teorem.)

**Teorem 5.2.1 (PPT)**

La $l$, $m$ og $n$ være tre distinkte parallelle linjer. La $t$ være en transversal som skjærer linjene i $A$, $B$ og $C$, respektivt, og la $t'$ være en transversal som skjærer linjene i $A'$, $B'$ og $C'$. Anta $A * B * C$.




Da vil

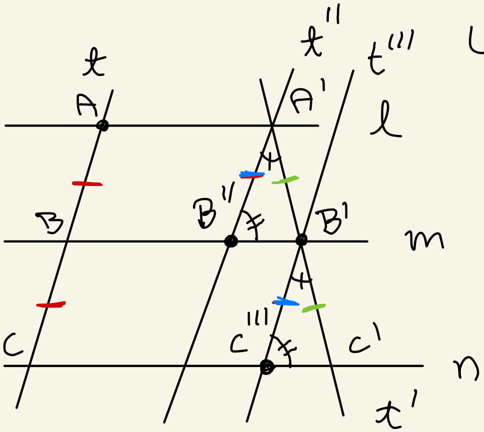
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

Vi starter med å vise et spesialtilfelle.

Lemma 5.2.2

Gjør de samme antagelsene som i Teorem 5.2.1. Anta i tillegg at $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Da vil $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$.

Bevis.



Dersom $A \neq A'$, la $t''$ være linjen som går gjennom $A'$ s.a. $t \parallel t''$ (EPP). Huis $A = A'$, så la $t'' = t$. Huis $B' \neq B$, la $t'''$ være linjen gjennom $B'$ s.a. $t''' \parallel t$, ellers la $t''' = t$.

La $B''$ være hvor $t''$ krysser $m$ og $C'''$ hvor $t'''$ krysser $n$ (Teorem 5.1.5)

Dersom $A = A'$, så vil $B'' = B$ og $\overline{AB} = \overline{A'B''}$.

Dersom $B = B'$, så vil $C''' = C$ og $\overline{BC} = \overline{B'C'''}$.

Dersom $A \neq A'$ og $B \neq B'$, vil $\overline{A'B''} \cong \overline{AB}$ og $\overline{B'C'''} \cong \overline{BC}$. (teorem 5.1.10)

Kombinert med $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, så gir dette at $\overline{A'B''} \cong \overline{B'C'''}$.

Huis $B'' = B'$, så vil $C''' = C'$, og

vi er ferdige.

Hvis ikke, så gir teorem 5.1.8 at enten $t'' \parallel t'''$ eller $t'' = t'''$. (transitivitet av $\parallel$)

Da impliserer MAINT at

$\angle B''A'B' \cong \angle C'''B'C'$ og

$\angle A'B''B' \cong \angle B'C'''C'$ (tenk nøye gjennom hvorfor),

så $\triangle B''A'B \cong \triangle C'''B'C'$ fra VSV.

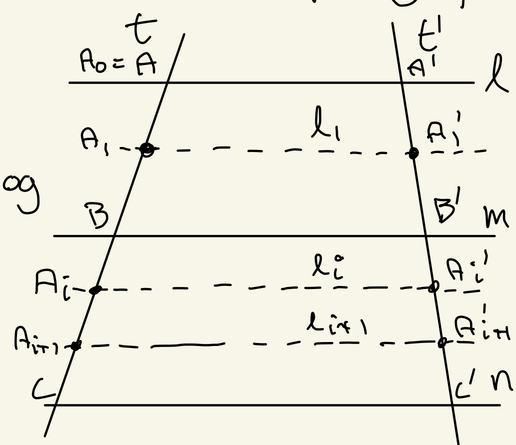
Det følger at $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$ (def. av kongruente trekanter).

$\square$

<u>Bevis av PPT (5.2.1)</u> for $\frac{AB}{AC}$ rasjonal.

Ser først på $\frac{AB}{AC}$ rasjonalt tall, altså $\frac{AB}{AC} = \frac{p}{q}$ for positive heltall $p$ og $q$.

Så bruker vi linjalpost. til å velge $A_0, A_1, \dots, A_q$ på $t$ s.a. $A_0 = A$, $A_q = C$ og $A_iA_{i+1} = \frac{AC}{q}$ for enhver $i$.




Merk at $AA_p = p \cdot \frac{AC}{q} = AB$, så $A_p = B$.

For enhver $i$, $1 \leq i \leq q$, så eksisterer det en linje $l_i$ s.a. $A_i \in l_i$ og $l_i \| l$. La $A_0' = A'$ og $A_i'$ være der $l_i$ skjærer $t'$ (teorem 5.1.5).

Fra lemma 5.2.2 følger det at $A_i'A_{i+1}'$

$$= \frac{A'C'}{q}.$$

Siden $l_p = m$ og $l_q = n$, så må $A_q' = C'$, så

$$\underline{\frac{A'B'}{A'C'}} = \frac{A_0'A_p'}{A_0'A_q'} = \frac{p \cdot (A'C'/q)}{q \cdot (A'C'/q)} = \frac{p}{q}$$

$$= \frac{p \cdot (AC/q)}{q \cdot (AC/q)} = \frac{A_0A_p}{A_0A_q} = \underline{\frac{AB}{AC}}.$$

$\square$

Trenger sammenligningsteoremet E3.3: Dersom $x, y \in \mathbb{R}$ s.a.

1. ethvert rasjonalt tall mindre enn $x$ også er mindre enn $y$, og
2. ethvert rasjonalt tall mindre enn $y$ også er mindre enn $x$,

så $x = y$.

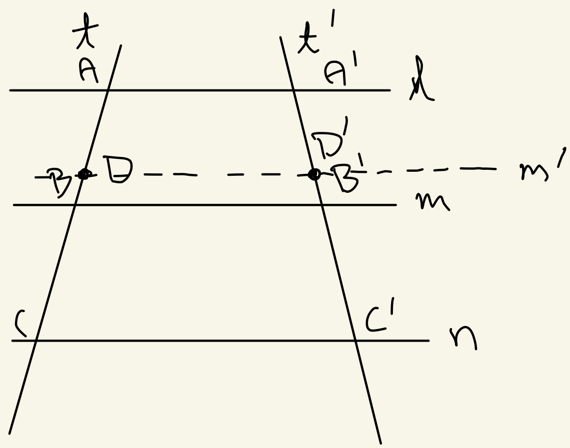
PPT

<u>Bevis av teorem</u> 5.2.2 for $AB/AC \in \mathbb{R}_+$.

Anta nå $\frac{AB}{AC} = x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ og $\frac{A'B'}{A'C'} = y$ $(y \in \mathbb{R}_+)$

Vi skal E3.3 og beviset i tilfellet $\frac{AB}{AC}$ rasjonal for å vise $x=y$.

La $r$ være et rasjonalt tall s.a. $0<r<x$.




Velg et punkt $D$ på $t$ s.a. $\frac{AD}{AC} = r$.

La $m'$ være være linjen s.a. $D \in m'$ og $m' \parallel m$, og la $D'$ være der hvor $m'$ krysser $t'$.

Da vet vi at $\frac{A'D'}{A'C'} = \frac{AD}{AC} = r$.

Siden $l, m, m'$ er parallelle, så $A' * D' * B'$, så $r = \frac{A'D'}{A'C'} < \frac{A'B'}{A'C'} = y$.

Anta $0 < r < y$ for $r$ rasjonal.
Da følger $r < x$ av et lignende argument.

Dermed gir E3.3 at

$x = y$, så

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

$\square$