401 Forelesninger onsdag 20.02 14^{15}-16^{00} KJ5
torsdag 21.02 14^{15}-16^{00} G1

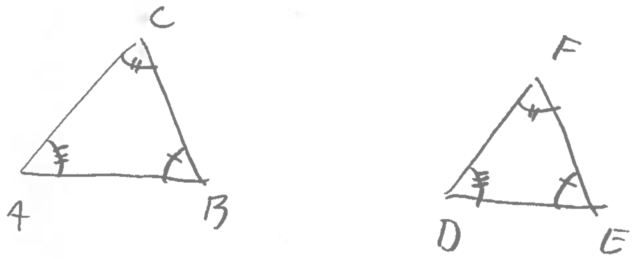
4.7 (avslutning) Euklids parallellpostulat.

<u>Formlike trekanter</u>

(similar)

<u>def</u> (4.7.6) ΔABC ΔDEF er <u>formlike</u> hvis

$$\angle ABC \cong \angle DEF, \ \angle BCA \cong \angle EFD, \ \angle CAB \cong \angle FDE$$



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

<u>Wallis' postulat</u>: ΔABC trekant, $\overline{DF}$ linjestykke

$\Rightarrow$ $\exists$ punkt F slik at $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(2)

Teorem (4.7.7) Wallis' postulat (WP) er ekvivalent til Euklids parallellpostulat (EPP).

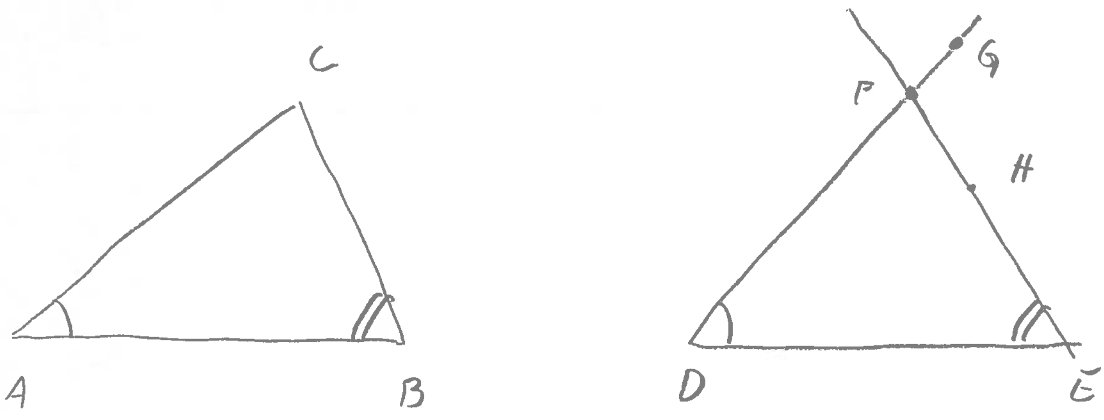
(Skisse)

Bevis: (EPP) $\Rightarrow$ (WP):

Antar $\triangle ABC$ bestemt og $\overline{DE}$ er et linjestykke

Gradskiveposlulatet (GSP) del 3. $\exists$ stråle $\overrightarrow{DG}$ slik at $\angle EDG \cong \angle BAC$

• $\exists$ stråle $\overrightarrow{EH}$ slik at $\angle DEH \cong \angle ABC$



(EPP) $\Rightarrow$ Euklids V postulat: $\overrightarrow{DG}$ og $\overrightarrow{EH}$ møtes i et punkt F

Teorem 4.7.4 (vinkelsumpostulatet):

$$\mu(\angle DFE) = 180 - \mu(\angle EDF) - \mu(\angle DEF)$$
$$\overset{\text{kongruent}}{=} 180 - \mu(\angle BAC) - \mu(\angle ABC)$$
$$= \mu(\angle ACB)$$

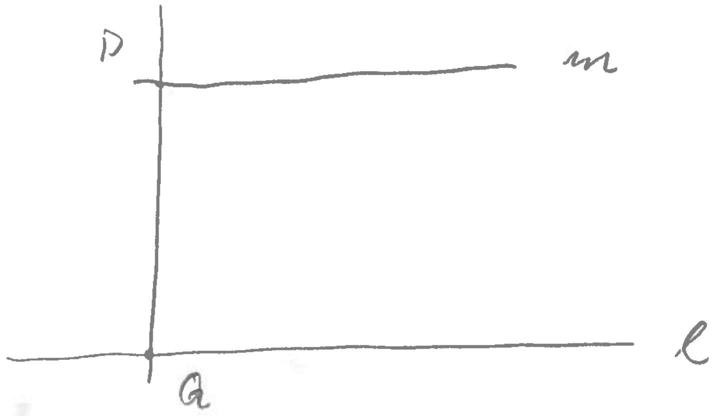
$\Rightarrow \angle DFE \cong \angle ACB \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$

③ (VP) ⇒ (EPP): La l være linje P et eksternt punkt

vil vise finnes bare en linje m gjennom P

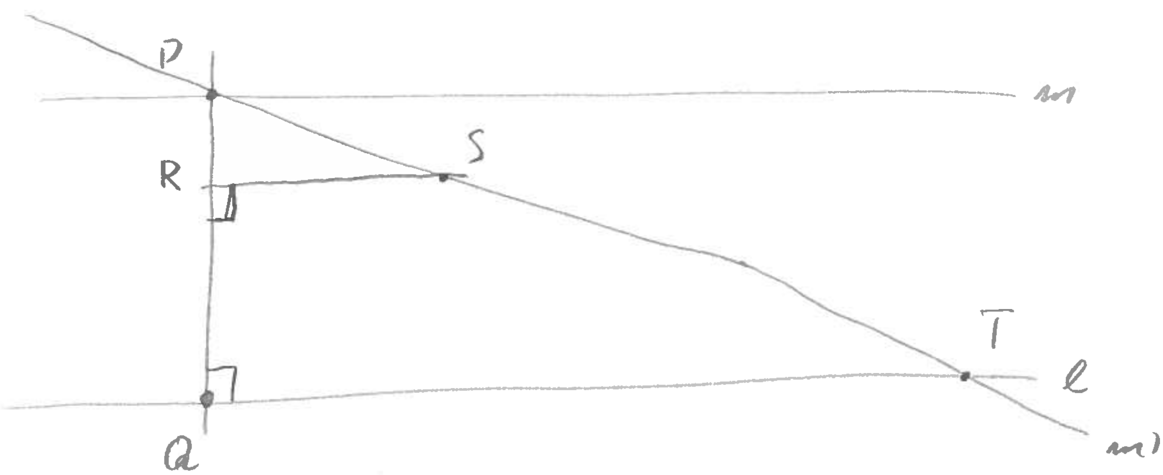
slik at $m \parallel l$.

Dobbel perpendikulær konstruksjon



(konstruerer normalen fra P til l, fot Q, m er normal til $\overleftrightarrow{PQ}$).

La m' være linje $P \in m'$ og $m' \parallel l$.
Antar $m' \neq m$ (se om vi får en motsigelse)



Finner S på samme side av m som Q.
Feller fra S ned på $\overleftrightarrow{PQ}$, kaller foten R.

④

Wallis' postulat finnes T slik at

$$\Delta PRS \sim \Delta PQT$$

$\angle PQT$ er rett $\rightarrow$ T ligger på l

gradskive postulatet del 3 (entydig skärt i et punkt)

$\Rightarrow$ $\{T\} = m' \cap l$ så $m' \nparallel l$ ↯

$\Rightarrow$ m er entydig q.e.d

4.8 Rektangler og defekt

__def__ (4.81) • ΔABC trekant, __defekten__ til ΔABC er gitt ved

$$\delta(\Delta ABC) = 180° - \underbrace{\sigma}_{\text{vinkelsum}}(\Delta ABC)$$

__merk__ Saccheri-Legendre $\Rightarrow$ $\delta(\Delta ABC) \geq 0$

• $\square ABCD$ firkant, __defekten__ til $\square ABCD$ gitt ved

$$\delta(\square ABCD) = 360° - \sigma(\square ABCD)$$

(5)

Teorem (4.8.2) Defekt er additivt

1 $\triangle ABC$ trekant og E et punkt på $\overline{BC}$ med $B * E * C$ slik at
(indre)

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABE) + \delta(ECA)$$

2 $\square ABCD$ konveks firkant da er

$$\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle ACD)$$

Def (4.8.3) Et rektangel er en firkant hvor hver vinkel er rett.

merk $\square ABCD$ rektangel $\sigma(\square ABCD) = 360°$

$$\delta(\square ABCD) = 0°$$

(men rektanglenes eksistens er ikke noe vi kan ta forgitt)

Teorem (4.8.4) Følgende utsagn er ekvivalente:

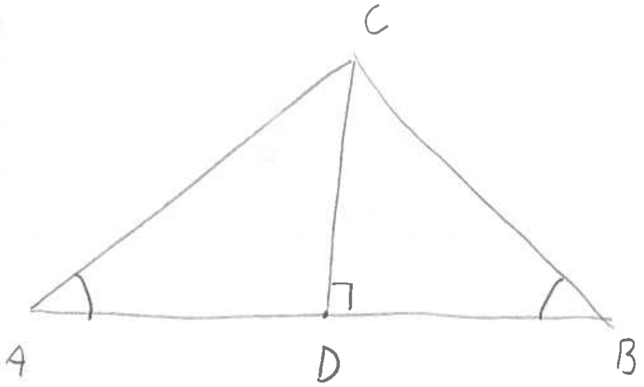
(1) det finnes en trekant med defekt lik 0°
(2) det finnes en rettvinklet trekant med defekt lik 0°
(3) det finnes et rektangel
(4) det finnes rektangler av vilkårlig størrelse (lengder større enn et gitt nr)
(5) enhver rettvinklet trekant har defekt lik 0°
(6) enhver trekant har defekt lik 0°

(6) (konsekvenser …)

Korollar (4.8.5) For enhver modell i nøytral geometri gjelder følgende:

det finnes en trekant med defekt lik 0° $\iff$ enhver trekant har defekt lik 0°

Lemma (4.8.6) (1) $\triangle ABC$ trekant $\Rightarrow$ da er minst to av vinklene i $\triangle ABC$ spisse. (2) Hvis indre vinklene på hjørnene A, B er spisse, $\Rightarrow$ da er foten på normalen fra C til $\overleftrightarrow{AB}$ mellom A og B.

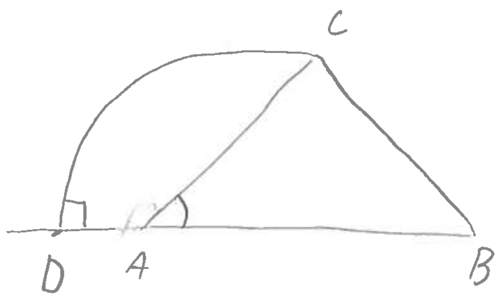


Bevis: Saccheri-Legendre: to vinkler må være spisse

Konstruerer normalen fra C ned på $\overleftrightarrow{AB}$, kaller foten D, må vise at $A * D * B$

$D \neq B$ og $D \neq A$ siden da ville enten $\angle CAB$ eller $\angle CBA$ være rett.

$D * A * B$



$\angle CAB$ utgjør og ytre vinkel til $\triangle CDA$

$\angle CDA$ er en motsatt indre vinkel til $\angle CAB$

$\Rightarrow \mu(\angle CAB) > \mu(\angle CDA)$ ↯

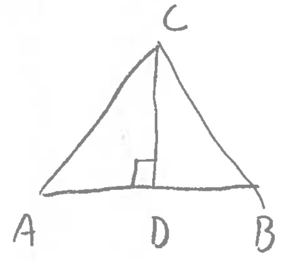
ytre vinkel teorem

på samme måte fører $A * B * D$ til en motsigelse

$\Rightarrow A * D * B$ q.e.d

Bevis Teorem (4.8.4)

(1) $\Rightarrow$ (2) $\triangle ABC$ trekant slik at $\delta(\triangle ABC) = 0^\circ$



Lemma 4.8.6 finnes et punkt D, slik at $A * D * B$ og $\angle CDA$ er rett

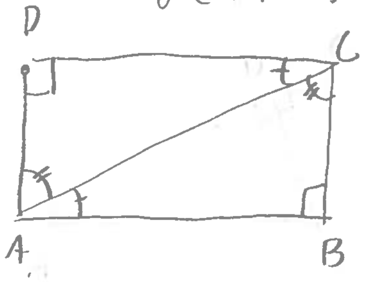
$\Rightarrow \triangle ADC$ og $\triangle BDC$ rettvinklede trekanter

Teorem 8.4.2 $\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ADC) + \delta(\triangle BDC) = 0^\circ$ $\quad \delta \geq 0$

↳ additiv $\quad \Rightarrow \delta(\triangle AD) = \delta(\triangle BDC) = 0^\circ$

(2) $\Rightarrow$ (3) Antar $\triangle ABC$ trekant, $\angle ABC$ er rett og

$$\delta(\triangle ABC) = 0^\circ \Rightarrow \mu(\angle BAC) + \mu(\angle ACB) = 90^\circ$$



Teorem 4.2.6: finnes et punkt D i motsatt halvplan av B begrenset av $\overleftrightarrow{AC}$ slik at $\triangle ABC \cong \triangle ACD$

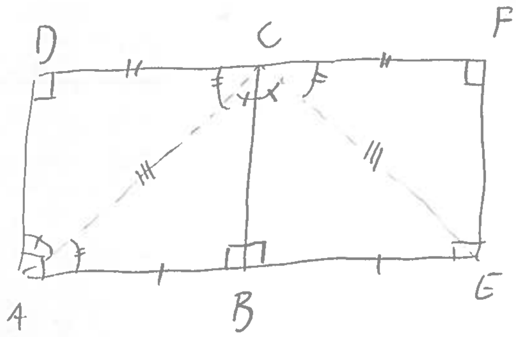
$\Rightarrow$ $\square ABCD$ er et rektangel (sjekk)

(3) $\Rightarrow$ (4) (ide "lime sammen rektangler")

La $\square ABCD$ være et rektangel

velg E på $\overrightarrow{AB}$ slik at $A * B * E$ og $AB = BE$

F på $\overrightarrow{DC}$ slik at $D * C * F$ og $DC = CF$



SAS : $\triangle ABC \cong \triangle EBC$

$\Rightarrow \mu(\angle BCA) = \mu(\angle BCE) < 90$

og E er i det indre av $\angle BCF$

(Teorem 3.4.5)

Vinkel addisjonspostulatet $\angle ACD \cong \angle ECF \overset{SAS}{\Longrightarrow} \triangle ACD \cong \triangle ECF$

Teorem 4.8.2 : $\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle ACD)$

$\Rightarrow \delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ACD) = 0^\circ$ (siden $\square ABCD$ er et rektangel alltid null defekt)

$\delta(\triangle ABC) = 0 \Rightarrow \mu(\angle BAC) + \mu(\angle BCA) = 90^\circ$

$\square ABCD$ er et parallellogram $\xRightarrow{\text{Teorem 4.6.6}}$ konveks

$\Rightarrow C$ er i det indre av $\angle BAD$

$\Rightarrow \mu(\angle BAC) + \mu(\angle CAD) = 90$

(vekselvinkler) $\Rightarrow \angle CAD \cong \angle BCA$

På samme måte viser vi at måte $\angle ACD \cong \angle CAB$

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta CDA$

(ASA)

Vi har $\Delta ABC \cong \Delta CDA \cong \Delta CFE \Rightarrow \angle CFE$ er rett

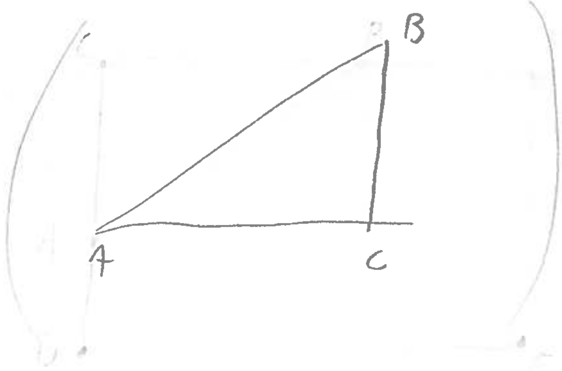
På samme måte $\angle BEF$ rett

$\Rightarrow \square AEFD$ er et rektangel hvor $AE = 2AB = DF$

Vi kunne også "legge til et rektangel på toppen".

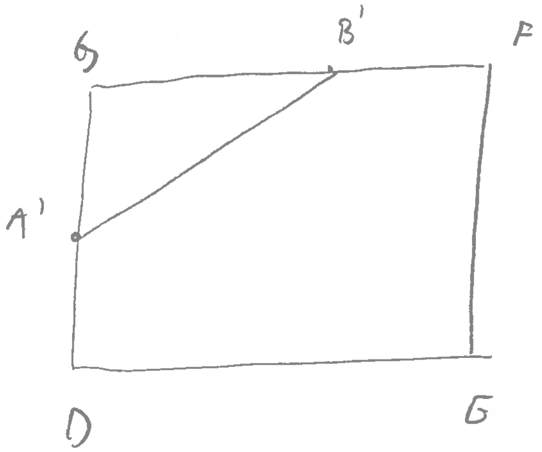
(Koordinatfunksjon er en 1-1-korrespondanse til reelle tall, og) aritmetikken ved reelle tall gjør at vi kan konstruere vilkårlige rektangler

(4) $\Rightarrow$ (5) ΔABC rettvinklet trekant. Vil vise $\delta(\Delta ABC) = 0°$



(10) Fra (4) vet vi at det finnes et rektangel

□$DEFG$ slik at $DG \geq AC$ og $FG \geq BC$



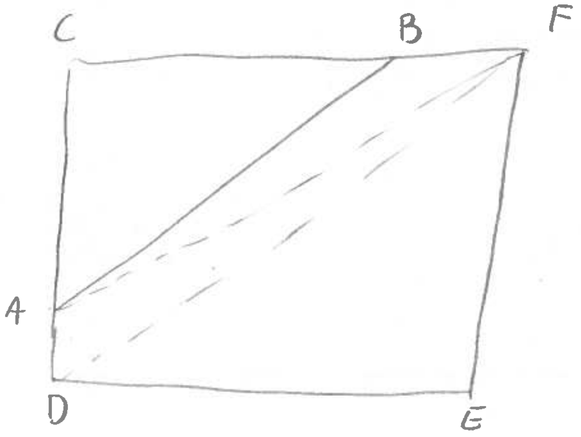
velger B' på $\overline{GF}$ slik at $GB' = CB$

A' på $\overline{GD}$ slik at $GA' = AC$

SvS
$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'G$ (forenkler og retter) $G = C$, $A' = A$,

$B' = B$

(idé: dele opp i trekanter)



□$CDEF$ er et rektangel $\Rightarrow$ har null defekt og er konveks

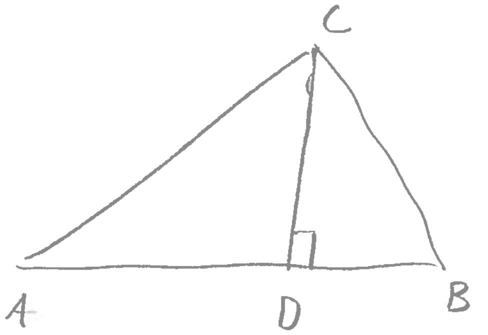
$\Rightarrow \delta(\triangle CDF) = \delta(\triangle DFE) = 0°$

$\Rightarrow 0° = \delta(\triangle CDF) \underset{4.8.2}{=} \delta(\triangle ADF) + \delta(\triangle AFC) \quad \Rightarrow \delta(\triangle AFC) = 0$

(11)

$$\delta(\Delta AFC) = \delta(\Delta AFB) + \delta(\Delta ABC) \Rightarrow \delta(\Delta ABC) = 0$$

(5) $\Rightarrow$ (6) Lemma 4.8.6: enhver trekant ΔABC kan deles inn i to rettvinklede trekanter ΔADC og ΔCDB



$$\delta(\Delta ABC) = \delta(\Delta ADC) + \delta(\Delta CDB) = 0^\circ + 0^\circ = 0^\circ$$

(6) $\Rightarrow$ (1) opplagt. "fra alle til en".

q.e.d

Clairauts aksiom: Det finnes et rektangel.

Korollar (4.8.7) Clairauts aksiom er ekvivalent til Euklids parallellpostulat.

(Teorem (4.7.4) defekt $= 0 \Rightarrow$ Euklid)

4.8 Defekt og rektangler

def <u>defekt</u> (til en trekant): $\triangle ABC$

$$\delta(\triangle ABC) = 180° - \sigma(\triangle ABC)$$

(alltid positiv pga Saccheri-Legendre)

parallellogram / firkant

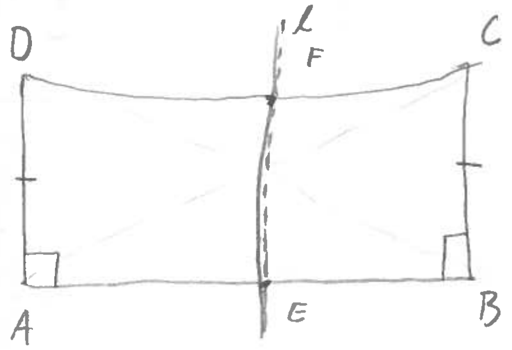
<u>defekt</u> (til en konveks firkant) $\square ABCD$

$$\delta(\square ABCD) = 360° - \sigma(\square ABCD)$$

⇒ (13)

Khayyami

def (4.8.8) (Saccheri firkant)



grunnlinje vinkler

$\angle ABC$ og $\angle DEF$ er rette

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$

$\overline{AB}$ grunnlinje

$\overline{CD}$ topplinje

$\angle ADC, \angle BCD$ topplinje vinkler

Thm (4.8.10) (Egenskaper ved Saccheri firkanten)

(1) $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

(2) $\angle BCD \cong \angle ADC$

(3) F, E midtpunkt $DF = CF$, $AE = BE$ $\Rightarrow l \perp \overleftrightarrow{AB}$ $\quad l \perp \overleftrightarrow{DC}$

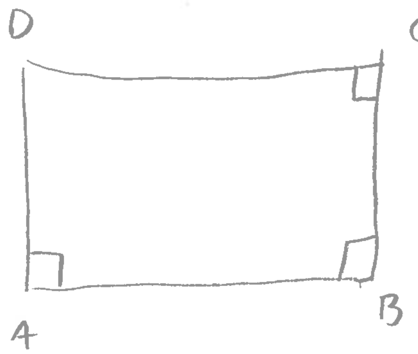
(4) $\square ABCD$ er et parallellogram

(5) $\square ABCD$ er konveks

(6) $\angle BCD$ og $\angle ACD$ er enten rette eller spisse

(18) (19).

def (4.8.9) (Lambert firkanten)



Tre av vinklene er rette

Lem (4.8.11) (Egenskaper til Lambert firkanten)

(1) $\square ABCD$ er et parallellogram

(2) $\square ABCD$ er konveks

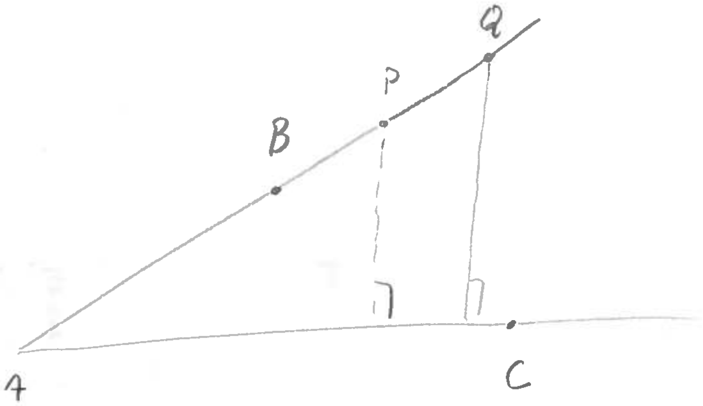
(3) $\angle ADC$ er enten rett eller spiss

(4) $BC \leq AD$

15

Teorem (4.8.12) (Aristoteles' teorem) A, B, C ikke kolineære slik at $\angle BAC$ er spiss og P, Q er to punkt på $\overrightarrow{AB}$ med $A * P * Q$

$\Rightarrow d(P, \overleftrightarrow{AC}) < d(Q, \overleftrightarrow{AC})$ og for ethvert ~~positivt~~ spesielt tall d_0 finnes det et punkt R på $\overrightarrow{AB}$ slik at $d(R, \overleftrightarrow{AC}) > d_0$



$(d(P, l)$ monotont økende$)$

4.9 Universelle hyperbolske teorem

Teorem (4.9.1) (Universelle hyperbolske teoremet)

Hvis det finnes en linje l_0, et eksternt punkt P_0 og minst to linjer igjennom P_0 som er parallell til l_0, da finnes det for enhver linje l og ethvert eksternt punkt P minst to linjer igjennom P og som er parallelle til l.

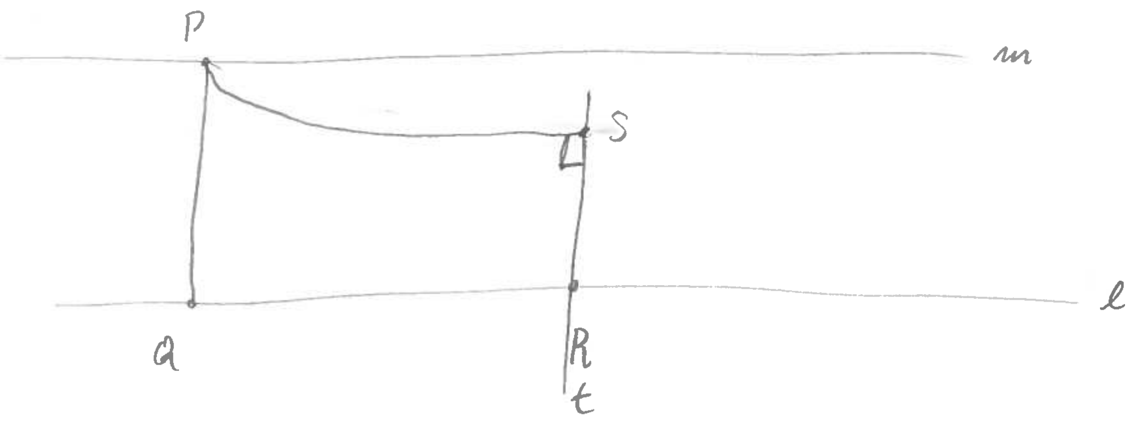
(16)

Bevis: Antar at det finnes en linje l_0 og et eksternt punkt P_0 hvor det går minst to linjer igjennom P_0 som er parallelle til l_0.

$\Longrightarrow$ Euklidiske parallellpostulat feiler (Korollar 4.8.7)
↳ abs

Videre lar vi l være en linje og P et eksternt punkt, vi må vise at det finnes minst to linjer igjennom P som begge er parallelle til l.

(Vanlig konstruksjon) Konstruerer normalen fra P til l kaller foten Q og lar m være linjen igjennom P normalt på $\overleftrightarrow{PQ}$.



(17)

velger et punkt R på l $R \neq P$, konstruerer t igjennom R som er normal til l. Konstruerer normalen fra P til t og kaller foten til denne S

$\Rightarrow$ $\square PQRS$ er en Lambert firkant

$\square PQRS$ kan ikke være en rektangel (fordi de ikke finnes)

$\Rightarrow$ $\angle QPS$ er ikke rett $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{PS} \neq m$

men $\overleftrightarrow{PS} \parallel l$ (alternerende indre vinkel kongruente med t transversal

q.e.d

Korollar (4.9.2) Det hyperbolske parallell postulat er ekvivalent med neglasjonen av det Euklidiske parallell postulat

Korollar (4.9.3) I enhver modell for nøytral geometri vil enten det Euklidiske eller det hyperbolske parallell postulat holde

(I de neste to kapitlene vil først euklidske så hyperbolske).

(18) Kap 5 Euklidsk geometri

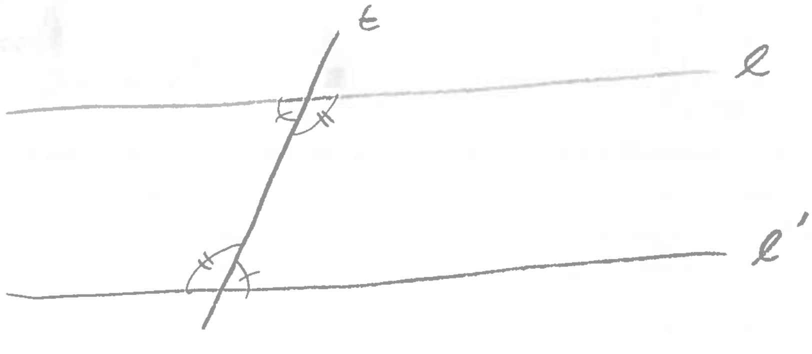
(NG 1) – (NG 6) + Euklids parallell postulat

mål: Bevise det pythagoreiske teoremet ($a^2 + b^2 = c^2$)

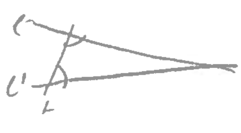
5.1 Noen grunnleggende teoremer i Euklidsk geometri

Teorem (5.1.1, motsatsen til alternerende indre vinkel teorem)

Hvis to parallelle linjer kuttes av en transversal t da er begge par av alternerende indre vinkler kongruente



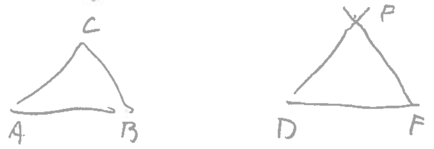
Teorem (5.1.2, Euklids postulat V) hvis l og l' er to linjer som skjæres av en transversal t slik at summen av målene til indrevinkler på en av sidene til t er mindre enn 180° da skjærer l og l' hverandre på denne siden av t



Teorem (5.1.3, vinkelsum teoremet) Enhver trekant

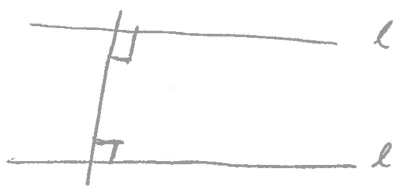
$\Delta ABC \Rightarrow \sigma(\Delta ABC) = 180°$

Teorem (5.1.4, Wallis' postulat) Hvis ΔABC er en trekant og $\overline{DE}$ er et linjestykke, da finnes et punkt F slik at $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



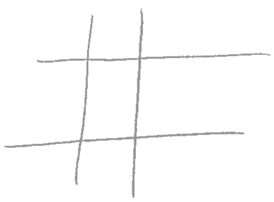
Teorem (5.1.5, Proclus' aksiom) Hvis l og l' er parallelle linjer og $t \neq l$ skjærer $l \Rightarrow t$ skjærer også l'

Teorem (5.1.6) Hvis l og l' er parallelle linjer og t en transversal slik at $l \perp t$ $\Rightarrow l' \perp t$



Teorem (5.1.7) Hvis l, m, n og k er linjer slik at $k \parallel l$, $m \perp k$ og $n \perp l \Rightarrow$ enten $m = n$ eller $m \parallel n$

(rektangel)



(20)

Teorem (5.1.8 parallellitet er transitivt)

Hvis $l \parallel m$ og $m \parallel n$ da er enten $l = n$ eller $l \parallel n$

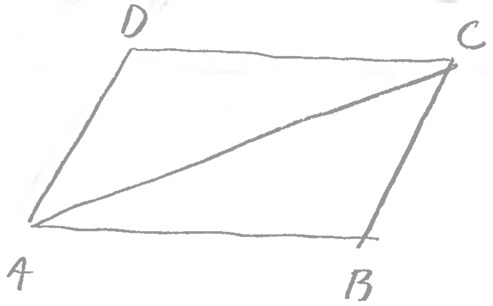
(Saccheri og Lambert firkantene er rektangler i euklidsk geometri)

Teorem (5.1.9 Clairauts aksiom) Det finnes et rektangel

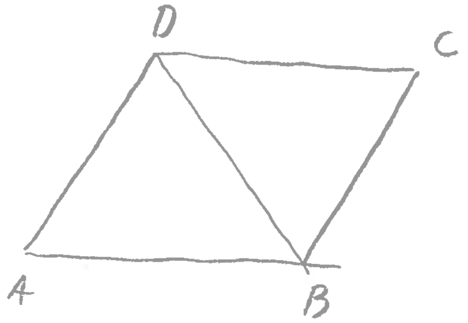
Teorem (5.1.10 egenskaper ved Euklidske parallellogram)

$\square ABCD$ er et parallellogram:

(1) Diagonalene deler firkanten inn i kongruente trekanter



$\Delta ABC \cong \Delta ACD$



$\Delta ABD \cong \Delta BCD$

(2) motstående sider er kongruente $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ og $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

(3) motstående vinkler er kongruente $\angle BAC \cong \angle BCD$ og $\angle ADC \cong \angle ABC$

(4) diagonalene skjærer hverandre på midten