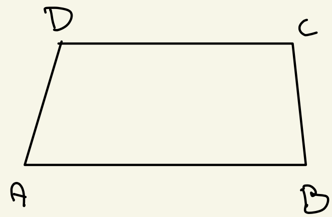
14/2-2019

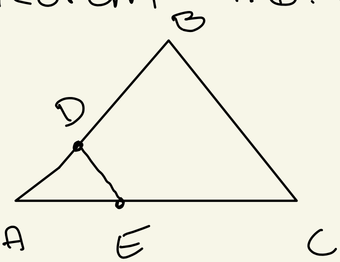
Def. av parallellogram

□ABCD er et parallellogram dersom $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ og $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.



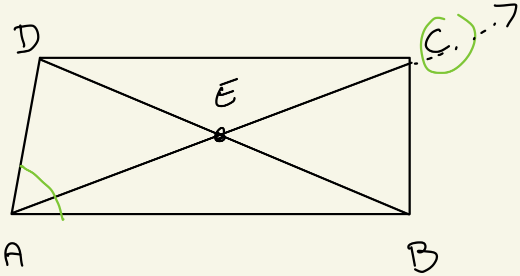
Teorem 4.6.6
Ethvert parallellogram er konvekst.

Teorem 4.6.7



La D og E være punkt s.a. $A * D * B$ og $A * E * C$ i trekanten $\triangle ABC$. Da vil □BCED være konveks.

Teorem 4.6.8



Firkanten □ABCD er konveks hviss $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ har et felles punkt.

Bevis av □ABCD konveks $\Rightarrow$ $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$ har et felles punkt.

Anta at $\square ABCD$ er konveks. Vi skal vise at $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{P\}$.
Merk at C ligger i det indre av $\angle DAB$ (def. konveks firkant), så $\overrightarrow{AC}$ krysser $\overline{BD}$ i et punkt E (tverrliggerteoremet).
På samme vis vil $\overrightarrow{BD}$ krysse $\overline{AC}$ i et punkt E'. Men $\overleftrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{BD}$ krysser i maks. et punkt (Insidens postulatet), så $E = E'$ og $E \in \overline{AC} \cap \overline{BD}$.

$\square$

Hint til motsatt retning:
E er i det indre av alle vinklene i firkanten. Sjekk opp mot def. av konveks firkant.

Korollar 4.6.9

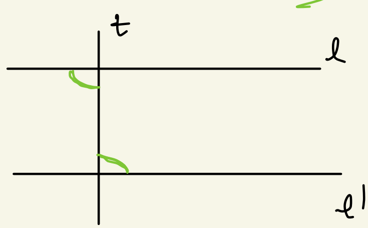
Dersom $\square ABCD$ er en firkant og $\square ACBD$ også er en firkant, så er ikke $\square ABCD$ konveks. Dersom $\square ABCD$ er en ikke-konveks firkant, så er $\square ACBD$ en firkant.

4.7 Utsagn som er ekvivalente til det Euklidske parallellpostulatet

Postulatet (EPP)
For enhver linje l og for ethvert punkt P som ikke ligger på l, så finnes det eksakt en linje m slik at $P \in m$ og $m \parallel l$.

Vi skal vise at utsagn er logiske ekvivalente i nøytral geometri, og ikke at utsagnene i seg selv er sanne.

Motsatt retning av AIVT (MAIVT)
Dersom to parallelle linjer skjæres av en transversal, så er begge par av AIV kongruente.



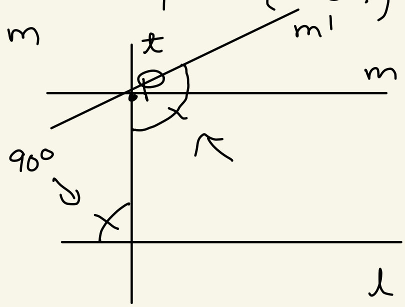
Merk at dette ikke er et teorem i nøytral geometri, men det følgende er:

Teorem 4.7.1
MAIVT er ekvivalent til EPP.

Bevis. Først anta MAIVT. Vi skal vise at utsagnet i EPP holder.

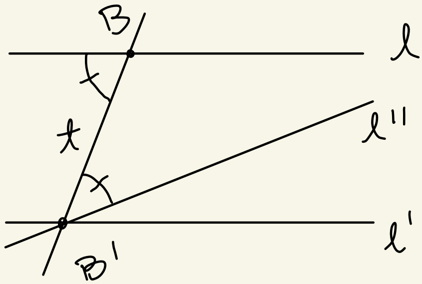
La l være en linje og P eksternt punkt til l. Vi skal vise at det finnes eksakt en linje m s.a. $P \in m$ og $m \parallel l$.

Vi bruker dobbel normal konstruksjon (s.84) for å konstruere en parallell linje m til l og en transversal t til l og m. Vi må vise at m er unik. Anta at m' er en linje s.a. $P \in m'$ og $m' \parallel l$.



Men da sier MAIVT at AIV til m' og l er kongruente, $m' \perp t$, og dermed må $m' = m$ (gradskivepostulatet del 3).

Motsatt retning: Anta EPP. La l og l' være to parallelle linjer med transversal t (hypotese). Skal vise at parene av AIV er kongruente.



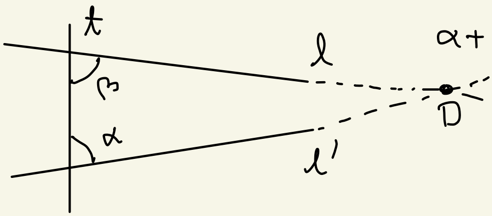
La B og B' være der hvor t krysser hhv. l og l'. La l'' være linjen gjennom B' s.a. AIV formet av l og l'' er kongruente. (l'' eksisterer fra gradskivepost).

Da har vi fra A1VT at $l \parallel l''$.
Unikhet fra EPP gir da at $l' = l''$.

$\square$

EPP er ikke det samme utsagnet som Euklid brukte.

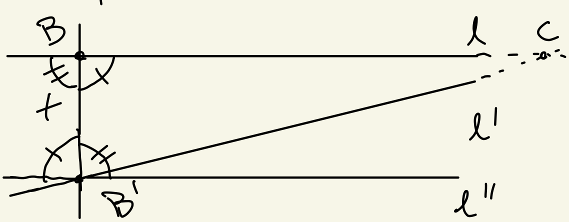
Euklids femte postulat
Dersom l og l' er to linjer som krysses av en transversal t slik at summen av vinkelmålene av de to indre vinklene på en side av t er mindre enn $180°$, så vil l og l' krysse på den siden av t.



$\alpha + \beta < 180°$

Men de er ekvivalente (Teorem 4.7.2).

Bevis. Anta EPP. La l og l' være to linjer som beskrevet i Euklids femte.



La B og B' være der hvor t krysser hhv. l og l'.

Det eksisterer en ℓ'' s.a. $B' \in \ell''$ og s.a. begge par av ikke-AIV til ℓ og ℓ'' har vinkelmål med sum 180°.
(Gradskivepostulatet).
Merk at $\ell'' \neq \ell'$. (Unikhet i gradskive.post), og at $\ell'' \parallel \ell$ (AIVT). Så $\ell' \nparallel \ell$ (EPP). Derfor eksisterer det et punkt C på ℓ og ℓ' (negasjon av def. av parallell).
$\triangle BB'C$ er en trekant, så summen av vinkelmålene til to indre vinkler i $\triangle BB'C$ er mindre enn 180° (Lemma 4.5.3).
Dermed må C være på den siden av t hvor de indre vinklene har vinkelmål med sum mindre enn 180°.

Motsatt retning er øv 4.7.1

$\square$

Andre ekvivalente utsagn til EPP (teorem 4.7.3):

1. (Proclus's aksiom) Dersom ℓ og ℓ' er parallelle linjer og $t \neq \ell$ er en linje s.a. t krysser ℓ, da krysser t

også l'.

2. Dersom l og l' er parallelle linjer og t er en transversal til l og l' s.a. $t \perp l$, da er $t \perp l'$.

3. Hvis m, n, k, l er linjer s.a. $k \parallel l$, $m \perp k$, $n \perp l$, da er $m = n$ eller $m \parallel n$.

4. Dersom $l \parallel m$ og $m \parallel n$, da er enten $l = n$ eller $l \parallel n$ (Transitivitet)

Relatert til SLT fra i går:

Vinkelsumpostulatet (VSP)

Dersom $\triangle ABC$ er en trekant, er $\sigma(\triangle ABC) = 180°$.

(Merk at dette er et utsagn, ikke et teorem i nøytral geometri.)

Teorem 4.7.4

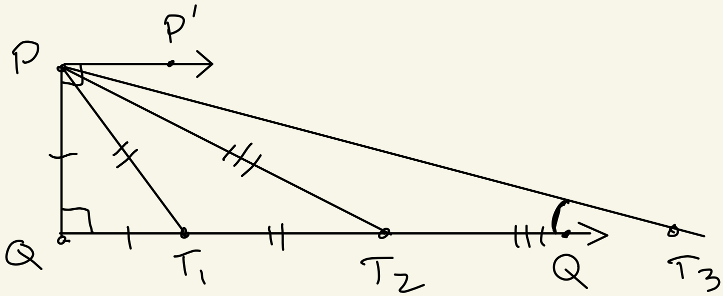
EPP er ekvivalent til VSP.

Vi skal vise en retning. For å gjøre det så trenger vi

Lemma 4.7.5

La $\overline{PQ}$ være et segment og Q' et punkt s.a. $\angle PQQ'$ måler $90°$.
For enhver $\varepsilon > 0$ så eksisterer det et punkt T på $\overrightarrow{QQ'}$ slik at $\mu(\angle PTQ) < \varepsilon°$.

Skisse til bevis:

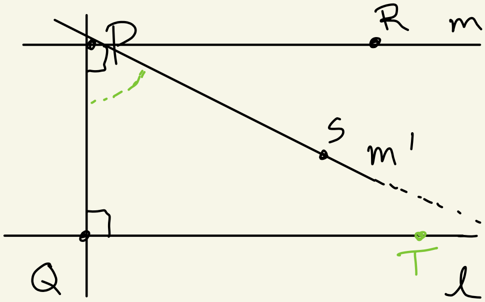


Les detaljene på egen hånd :)

Bevis av at VSP $\Rightarrow$ EPP i teorem 4.7.4
(Kontrapositivt bevis, $\neg$EPP $\Rightarrow$ $\neg$VSP)

Skal vise at dersom $\exists$ en linje ℓ og et eksternt punkt P s.a. det er flere parallelle linjer til ℓ gjennom P, så eksisterer det en trekant med vinkelsum ulik $180°$.

Anta at ℓ er en linje og P et eksternt punkt til ℓ.



Konstruer normal fra P ned på l. Kall foten Q. La m være en linje s.a $m \perp \overleftrightarrow{PQ}$, da er $m \parallel l$ (dobbel normal konstruksjon).

Det er en annen linje m' s.a. $P \in m'$ og $m' \parallel l$ (av hypotesen). Velg S på m' på samme side av m som Q og R på m på samme side av $\overleftrightarrow{PQ}$ som S. Velg T på l s.a. T er på samme side av $\overleftrightarrow{PQ}$ som S og $\mu(\angle QTP) < \mu(\angle SPR)$ (lemma 4.7.5)

Skal vise at $\sigma(\triangle PQT) < 180°$.

$$\sigma(\triangle QTP) = \mu(\angle PQT) + \mu(\angle QTP) + \mu(\angle TPQ)$$

$< \mu(\angle SPR)$

$< \mu(\angle QPS)$ (T er i det indre av $\angle QPS$).

Har at $\mu(\angle SPR) + \mu(\angle QPS)$
$= \mu(\angle RPQ)$ (S i det indre av $\angle RPQ$, så vi

kan bruke gradskive postulatet).

Dermed,

$$\sigma(\triangle QTP) < \mu(\angle PQT) + \mu(\angle RPQ)$$

$$= 180^\circ$$

(begge er rette vinkler).

$\square$