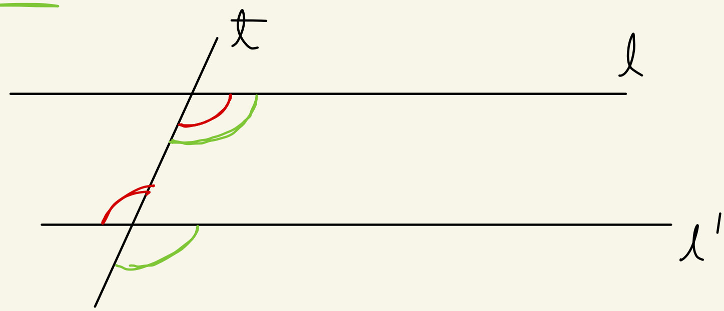
13/2 - 2019

I forrige

aksiom

- Kongruensbetingelser : SVS, VVS, VSV, SSS
- Hengselteoremet
- AIVT, KVT



- eksistens av parallelle linjer i nøytral geometri

Nå

Saccheri-Legendre teoremet (SLT):
Vinkelsummen i en trekant er $\leq 180°$.

(Og så firkanter.)

Def. av vinkelsum

La A, B, C være tre ikke-kollineære punkt. Vinkelsummen til $\triangle ABC$

er da

$$\sigma(\Delta ABC) = \mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle CAB).$$

Merk: Kongruente trekanter har samme vinkelsum.

Så SLT sier at $\sigma(\Delta ABC) \leq 180°$.
(Vi trenger det Euklidske parallellpost. for å vise $= 180°$.)

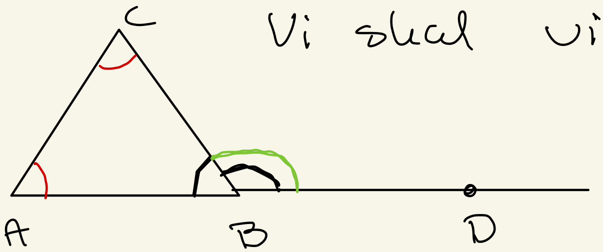
Trenger tre mindre lemma for å bevise SLT:

1. Summen av <u>to</u> vinkler i ΔABC er $< 180°$.
2. Hvordan addere vinkelsummer når man deler opp en trekant?
3. Å kunne bytte ut en trekant med en annen med samme vinkelsum, men med en av vinklene halvert.

1. Lemma 4.5.3
Hvis ΔABC er en trekant, så

$$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle ABC) < 180° \qquad (*)$$

Bevis. La $\triangle ABC$ være en trekant. Vi skal vise (*).



La D være et punkt på $\overleftrightarrow{AB}$ slik at $A * B * D$.

Da danner $\angle ABC$ og $\angle CBD$ et lineært par, så

$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle CBD) = 180°$ (lineært-par-teoremet)

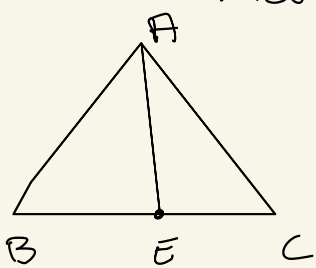
I tillegg er $\mu(\angle CAB) < \mu(\angle CBD)$ (YVT), så

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle CAB) < 180°.$$

$\square$

2. Lemma 4.5.4

Hvis $\triangle ABC$ er en trekant og E er i det indre av $\overline{BC}$, da



$$\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA) = \sigma(\triangle ABC) + 180°. \quad (*)$$

Bevis. Anta hypotesen. Vi skal vise (*)
Fra def. av vinkelsum:

$$\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA) = \mu(\angle EAB) + \mu(\angle ABE) + \mu(\angle BEA) + \mu(\angle CAE) + \mu(\angle ECA) + \mu(\angle AEC).$$

$= \mu(\angle BAC)$

$= 180°$

E er i det indre av $\angle BAC$ (3.3.10), så $\mu(\angle BAE) + \mu(\angle EAC) = \mu(\angle BAC)$ (gradskivepost.)

I tillegg, $\mu(\angle BEA) + \mu(\angle AEC) = 180°$ (lineært-par teoremet),

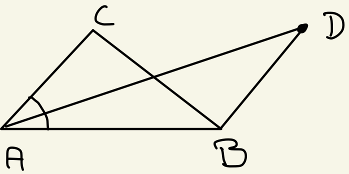
så vi får at

$$\sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA) = \sigma(\triangle ABC) + 180°.$$

$\square$

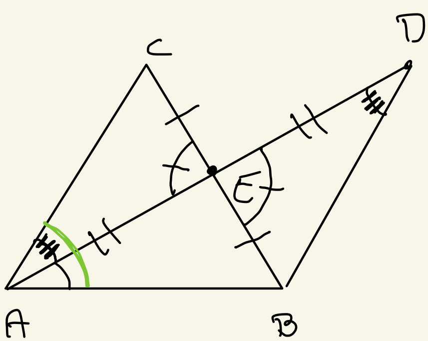
3. Lemma 4.5.5

La A, B, C være tre ikke-kollineære punkt.



Da eksisterer et punkt D som ikke ligger på $\overleftrightarrow{AB}$ s.a. $\sigma(\triangle ABD) = \sigma(\triangle ABC)$ og s.a. vinkelmålet til en av vinklene i $\triangle ABD$ er mindre enn eller lik $\frac{1}{2}\mu(\angle CAB)$.

Bevis. La A, B, C være tre ikke-kollineære punkt.



La E være midtpunktet på $\overline{BC}$ (3.2.22). La D være punktet på $\overrightarrow{AE}$ s.a. $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ og $A * E * D$ (linjalpost.).

Vi skal vise at $\sigma(\triangle ABD) = \sigma(\triangle ABC)$ og at enten $\mu(\angle BAD) \leq \frac{1}{2}\mu(\angle BAC)$ eller $\mu(\angle ADB) \leq \frac{1}{2}\mu(\angle BAC)$.

Siden $\angle AEC \cong \angle BED$ (Vertikale vinkler teorem), så er $\triangle AEC \cong \triangle DEB$ (SVS) og $\sigma(\triangle AEC) = \sigma(\triangle DEB)$.

Vi bruker lemma 4.5.4 to ganger:

$$\sigma(\triangle ABC) = \sigma(\triangle ABE) + \underline{\sigma(\triangle AEC)} - 180°$$

$\sigma(\Delta ABD) = \sigma(\Delta ABE) + \underline{\sigma(\Delta DEB)} - 180°$,

så $\sigma(\Delta ABC) = \sigma(\Delta ABD)$.

$\underline{\mu(\angle BAC)} = \underline{\mu(\angle BAE)} + \underline{\mu(\angle EAC)}$ (gradskive post),

så enten $\mu(\angle BAE) \leq \frac{1}{2}\mu(\angle BAC)$
eller $\mu(\angle EAC) \leq \frac{1}{2}\mu(\angle BAC)$.

$\angle BAE = \angle BAD$ og $\mu(\angle EAC) = \mu(\angle ADB)$,
så vi er ferdige.

$\square$

Teorem 4.5.2 (Saccheri-Legendre teoremet)
Dersom ΔABC er en trekant, så
$\sigma(\Delta ABC) \leq 180°$.

Bevis. La ΔABC være en trekant.
Anta $\sigma(\Delta ABC) > 180°$. Vi skal vise at det gir oss en motsigelse.
La oss si at $\sigma(\Delta ABC) = 180° + \varepsilon°$,
$\varepsilon > 0$. Velg et positivt heltall n

s.a. $2^n \varepsilon > \mu(\angle CAB)$ (Arkimedisk egenskap $\mathbb{R}$).

Lemma 4.5.5 gir oss

$\Delta A_1B_1C_1$ s.a. $\sigma(\Delta A_1B_1C_1) = \sigma(\Delta ABC)$

og en vinkel i $\Delta A_1B_1C_1$ er $\leq \frac{1}{2}\mu(\angle CAB)$.

Bruker Lemma 4.5.5 på $\Delta A_1B_1C_1$ for å få

$\Delta A_2B_2C_2$ slik at
$$\begin{aligned}\sigma(\Delta A_2B_2C_2) &= \sigma(\Delta A_1B_1C_1)\\ &= \sigma(\Delta ABC)\end{aligned}$$

og slik at en av vinklene i $\Delta A_2B_2C_2$ er $\leq \frac{1}{4}\mu(\angle CAB)$.

Fortsett n ganger:

Har $\Delta A_nB_nC_n$ slik at

$\sigma(\Delta A_nB_nC_n) = \sigma(\Delta ABC) = 180° + \varepsilon°$

og en av vinklene i $\Delta A_nB_nC_n$

er $\leq \frac{1}{2^n}\mu(\angle BAC) < \frac{1}{\cancel{2^n}}\cancel{2^n}\varepsilon° = \varepsilon°$.

Men det betyr at summen av de to andre vinklene i $\Delta A_nB_nC_n$

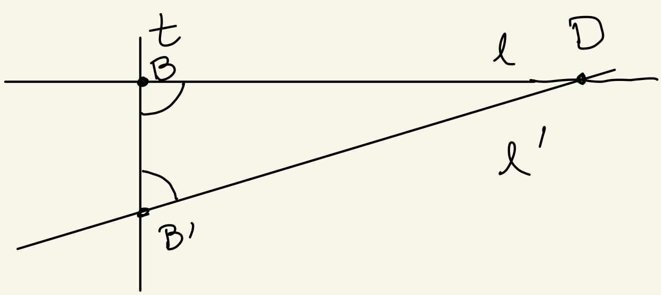
er større enn 180° (algebra), noe som motsier lemma 4.5.3. Vi må forkaste hypotesen $\sigma(\Delta ABC) > 180^\circ$ og konkludere med at $\sigma(\Delta ABC) \leq 180^\circ$.

$\square$

To konsekvenser:

Korollar 4.5.6
Summen av vinkelmålene til to indre vinkler i en trekant er $\leq$ vinkelmålet til den eksterne ytre vinkelen.
(Forbedrer YVT)

Korollar 4.5.7 (Motsatt retning i Euklids femte post.)



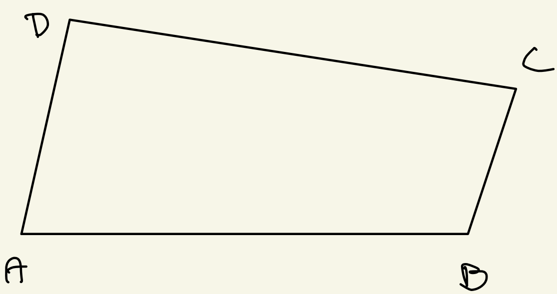
Dersom l og l' krysser, vil summen av vinkelmålene til de indre vinklene ved t være $< 180^\circ$

t er en transversal til l og l'.

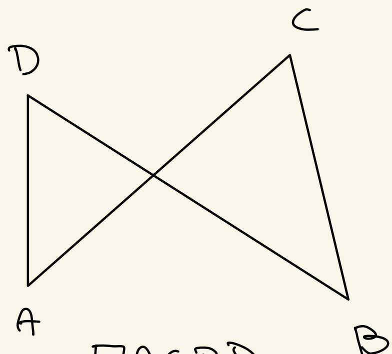
4.6 Firkanter

Definisjon

La A, B, C, D være fire punkt, hvor ingen kombinasjon av tre av de er kollineære. Anta videre at $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ og $\overline{DA}$ er fire segmenter som enten har et endepunkt felles eller ingen punkt felles. Da har vi en firkant $\square ABCD$



$\square ABCD$



$\square ACBD$

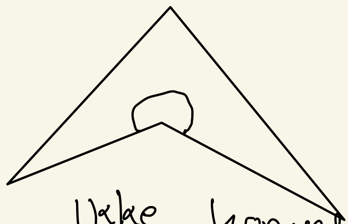
Def. diagonaler

Diagonalene i $\square ABCD$ er segmentene $\overline{AC}$ og $\overline{BD}$.

Vinklene i en firkant er def. av tre punkt (som i en trekant).

Def. av konveks firkant

En firkant er konveks dersom hvert hjørnepunkt ligger i det indre av vinkelen formet av de tre andre hjørnene.



Ikke konveks.

Def. av vinkelsum

Dersom $\square ABCD$ er konveks, så er vinkelsummen def. som

$\sigma(\square ABCD) = \mu(\angle ABC)$ + vinkelsummen av de tre andre hjørnene.

(Ikke def. for ikke-konveks firkant)

Teorem 4.6.4

Dersom $\square ABCD$ er en konveks firkant, så er $\sigma(\square ABCD) \leq 360°$.