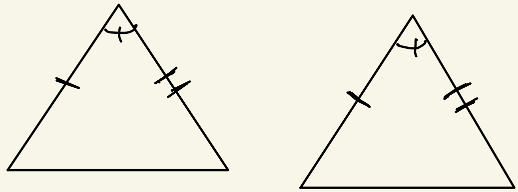
6/2-2019

4.2 Kongruensbetingelser for trekanter

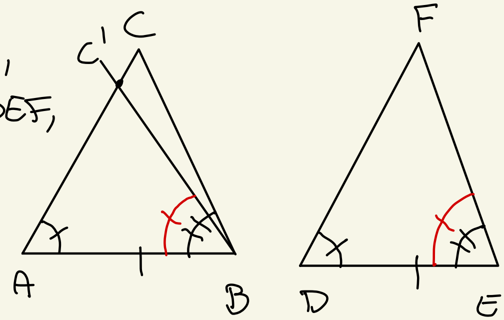
I dag skal se at VSV, VVS og SSS er kongruensbetingelser for trekanter.



Side-vinkel-side (SVS).

Merk VSS ikke holder (med mindre det er snakk om to rettvinklede trekanter og V er 90°.)

Teorem 4.2.1 (Vinkel-side-vinkel, VSV)
Hvis ΔABC og ΔDEF er to trekanter slik at $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ og $\angle ABC \cong \angle DEF$, så $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



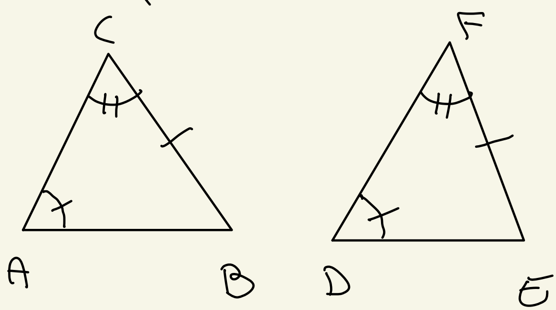
Bevis. Antar hypotesen. Det eksisterer et punkt C' på $\overrightarrow{AC}$ slik at $\overline{AC'} \cong \overline{DF}$ (Punktkonstruksjonsteoremet.)
Vi har da at $\Delta ABC' \cong \Delta DEF$

fra SVS, så $\angle ABC' \cong \angle DEF$.
Siden $\angle ABC \cong \angle DEF$, så har vi $\angle ABC \cong \angle ABC'$.
Vinkelmålspostulatet gir at $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC'}$. Men $\overrightarrow{BC}$ kan bare krysse $\overleftrightarrow{AC}$ i et punkt, så $C = C'$. $\square$

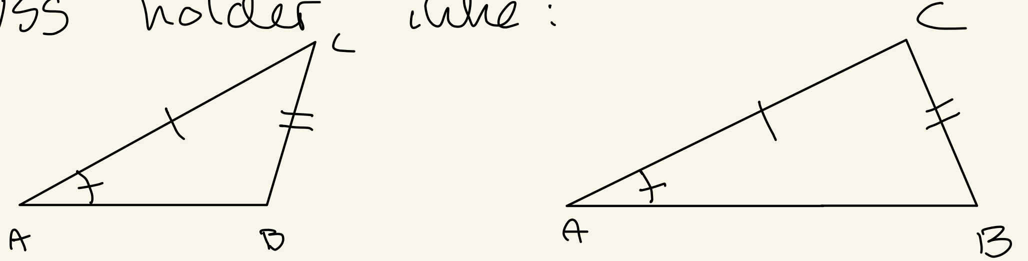
Teoremet kan brukes for å vise motsatt retning i likebeint trekant-teoremet (øving).

Teorem 4.2.3 (Vinkel-vinkel-side)

ΔABC og ΔDEF er kongruente dersom



VSS holder ikke:



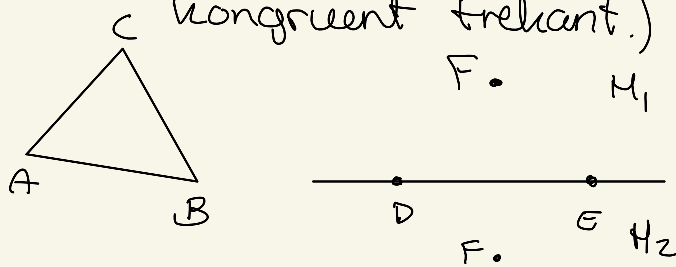
Men det holder for rettvinklede trekanter:

Teorem 4.2.5
Dersom hypotenus og katet til en rettvinklet trekant er kongruent med hypotenus og en katet i en annen trekant, så er trekantene kongruente.

Vi kan sammenligne bare sidene i to trekanter:

Teorem 4.2.7 (SSS)
Dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter slik at $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ og $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, så er $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

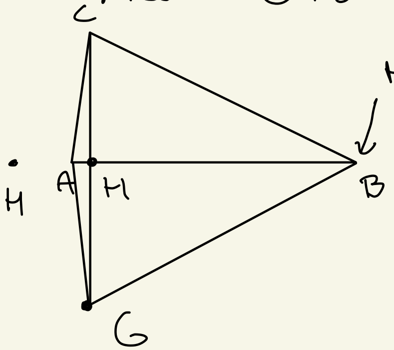
Trenger følgende resultat:
Teorem 4.26. (Konstruksjon av kongruent trekant.)
Dersom $\triangle ABC$ er en trekant og $\overline{DE}$ et segment s.a. $\overline{DE} \cong \overline{AB}$ og



H er et halvplan begrenset av $\overleftrightarrow{DE}$, så eksisterer det et unikt punkt $F \in H$ slik at $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

Bevis. Øving (bruk SVS).

Bevis av SSS. Antar hypotesen. Må vise at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Fra det forrige teoremet (4.2.6), så eksisterer et punkt G, på motsatt side av $\overleftrightarrow{AB}$ fra C, slik at

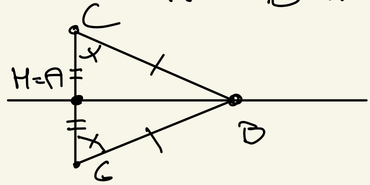
$$\triangle ABG \cong \triangle DEF.$$

Siden C og G ligger på motsatte sider av $\overleftrightarrow{AB}$, så eksisterer det punkt H mellom C og G slik at H ligger på $\overleftrightarrow{AB}$ (Planseparasjonspostulatet).

Vi har fem tilfeller: $H = A$, $H = B$, $A * H * B$, $H * A * B$ eller $A * B * H$.

1. Anta $H = A$.

$\angle ACB = \angle GCB$ og

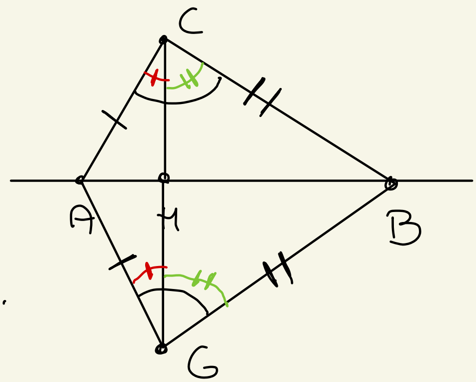


$\angle AGB = \angle CGB$. Siden $BC = BG$, har vi en likebeint trekant $\triangle CBG$. Fra likebeint trekant teoremet er $\angle GCB \cong \angle CGB$. Så SVS gir $\triangle ABC \cong \triangle ABG$.

2. $M = B$ vises som 1.

3. Anta $A * M * B$.

Da er M i det indre av $\angle ACB$, og i det indre av $\angle AGB$ (3.3.10).



så

$$\begin{cases} \mu(\angle ACB) = \mu(\angle ACM) + \mu(\angle MCB) \\ \mu(\angle AGB) = \mu(\angle AGM) + \mu(\angle MGB). \end{cases}$$

(NG5).

Men $\mu(\angle ACM) = \mu(\angle ACG)$

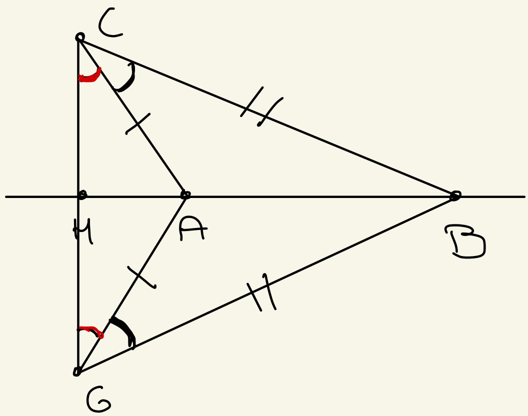
$= \mu(\angle AGC)$

(likebeint trekant teoremet) $= \mu(\angle AGM)$, og på samme måte

$\mu(\angle MCB) = \mu(\angle MGB)$, så

$\mu(\angle ACB) = \mu(\angle AGB)$. Fra SVS følger $\triangle ABC \cong \triangle ABG$.

4. $M * A * B$



A er i det indre av $\angle MCB$ og $\angle MGB$ (3.3.10).

$\mu(\angle AGB)$

$= \mu(\angle MGB) - \mu(\angle MGA)$

$\mu(\angle ACB) = \mu(\angle MCB) - \mu(\angle MCA)$.

$$\left.\begin{aligned} \mu(\angle MGB) &= \mu(\angle MCB) \\ \mu(\angle MGA) &= \mu(\angle MCA) \end{aligned}\right\} \text{likebeint trekant teoremet},$$

så $\mu(\angle AGB) = \mu(\angle ACB)$, og igjen, fra SVS har vi $\triangle ABC \cong \triangle ABG$.

5. $A * B * H$. Dette kan vises på samme vis som 4.

Har vist at $\Delta ABC \cong \Delta ABG$, men $\Delta ABG \cong \Delta DEF$, så ferdig. $\square$

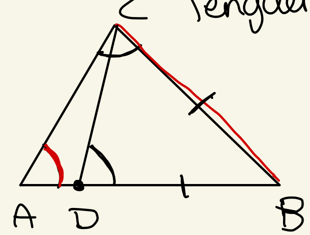
4.3 Ulikheter for trekanter

Teorem 4.3.1 (Scalene ulikheten)

La ΔABC være en trekant. $AB > BC$ hviss $\mu(\angle ACB) > \mu(\angle BAC)$.

(Scalene trekant har sider med tre ulike lengder)

(Den større siden ligger ovenfor den større vinkelen.)



Bevis. La ΔABC være en trekant.

Anta at $AB > BC$.

Da er det et punkt D mellom A og B s.a. $\overline{BD} \cong \overline{BC}$. (Linjal postulatet)

Har at $\mu(\angle ACB) > \mu(\angle DCB)$ (Teorem 3.3.10, NG5).

Vi har også at $\angle DCB \cong \angle CDB$ ($\triangle DCB$ er likebeint). Men $\angle CDB$ er en ytre vinkel til $\triangle ADC$, så

$$\begin{aligned} \mu(\angle CAB) &= \mu(\angle CAD) \\ &< \mu(\angle CDB) \\ &= \mu(\angle DCB) \\ &< \mu(\angle ACB), \end{aligned}$$

så $\mu(\angle CAB) < \mu(\angle ACB)$.

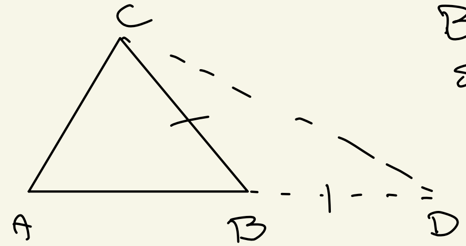
Motsatt retning er øving. $\square$

Teorem 4.3.2 Trekantulikheten.

$AC < AB + BC$ for tre ikke-kollineære punkt.

Bevis: øving. Hint:

$AD = AB + BC$

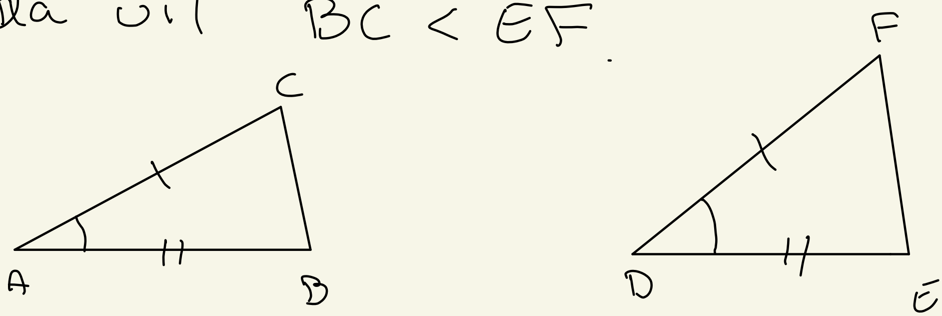


$BD = BC$

sammenlign med trekanten over.

Teorem 4.3.3 Hengselteoremet

Dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter slik at $AB = DE$, $AC = DF$ og $m(\angle BAC) < m(\angle FDE)$, da vil $BC < EF$.



7/2-2019

Bevis. Vi antar at vi har $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ slik at $AB = DE$, $AC = DF$ og $m(\angle BAC) < m(\angle FDE)$.

Vi skal vise at $BC < EF$.

Finn et punkt G på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ som C slik at $\triangle ABG \cong \triangle DEF$

(Teorem 4.2.6). Vi er ferdige dersom vi kan vise at $BG > BC$.

$$\mu(\angle BAG) = \mu(\angle EDF)$$
$$> \mu(\angle BAC),$$

så C er i det indre av $\angle BAG$ (teorem 3.4.5). $\overrightarrow{AC}$ må krysse $\overline{BG}$ (tverrliggerteoremet) i et punkt J.

Hvis $J = C$ så $B * C * G$ og $BG > BC$ følger.

Anta at $J \neq C$. Det betyr at $C \notin \overleftrightarrow{BG}$. (linjer krysser i et unikt punkt).

La $\overrightarrow{AH}$ være halveringsstrålen til $\angle CAG$ (Teorem 3.4.7).

Da er H i det indre av $\angle GAC = \angle GAJ$, så $\overrightarrow{AH}$ må krysse $\overline{JG}$ (tverrliggerteoremet).

La det punktet hete M.

Siden $\overline{JG} \subset \overline{BG}$, $B * M * G$.

Merk at $\Delta AMG \cong \Delta AMC$.

($AG = AC$, felles side, halverte $\angle GAC$, så vi kan bruke SVS.), så $MC = MG$.

Dermed er $BG = BM + MG$

def. av mellomliggenhet

$= BM + MC$.

Siden C ikke ligger på

$\overleftrightarrow{BH}$, følger

$BC < BH + HC$ av trekant-ulikheten.

$= BG$

$= FE$

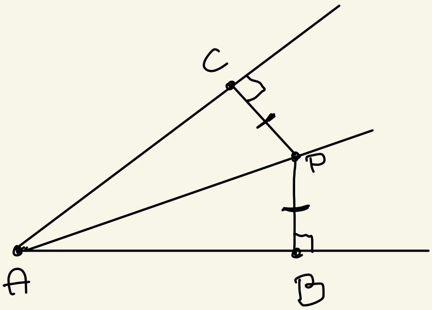
$\square$

Def 3.4.5 Avstand fra P til ℓ

La ℓ være en linje og P et punkt. Da er avstanden fra P til ℓ, $d(P, \ell)$, definert til å være avstanden fra P til punktet på ℓ hvor normalen fra P ned på ℓ krysser ℓ ("foten" til normalen).

Dette er den korteste avstanden fra P til ℓ. (Teorem 4.3.4).

Teorem 4.3.6 (Punktvis rep. av vinkelhalveringsstråle)

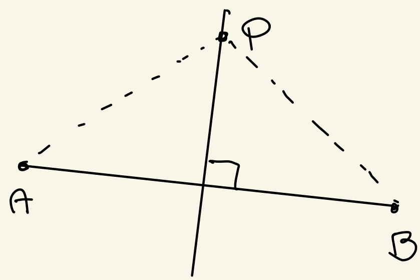


P ligger på vinkelhalveringsstrålen til $\angle CAB$ hviss

$$d(P, \overleftrightarrow{AB}) = d(P, \overleftrightarrow{AC})$$

Bevis. Bruk kongruensbetingelser.

Teorem 4.3.7



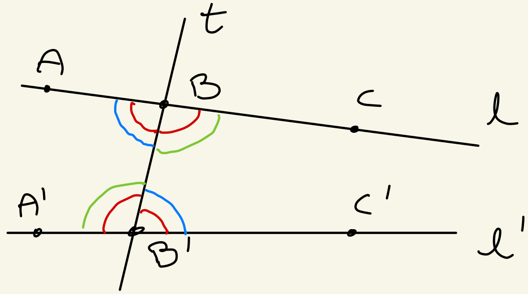
P ligger på <u>halveringsnormalen</u> til $\overline{AB}$ hviss

$$PA = PB$$

4.4 Alternerende indre vinkler-teorem (AIVT)

Vi skal se på hva vi kan si om parallelle linjer i nøytral geometri.

Def. 4.4.1



$B \neq B'$

t kalles en transversal til l og l'.

Indre vinkler: $\angle B'BC$, $\angle ABB'$, $\angle A'B'B$
og $\angle BB'C'$.

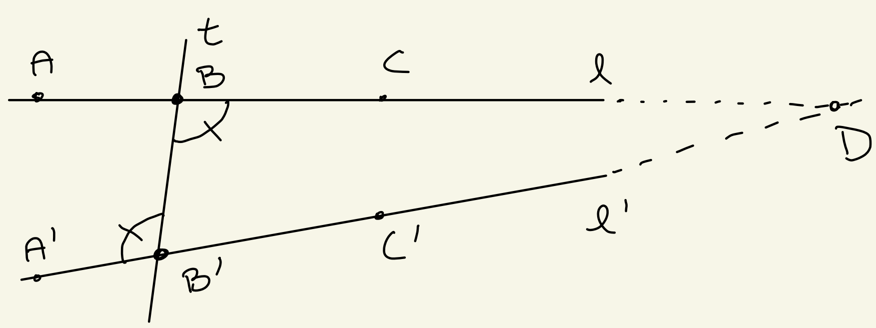
Alternerende indre
vinkler

Alternerende indre vinkler.

Teorem 4.4.2 (AIVT)

Dersom l og l' er to linjer med transversal t slik at et par av alternerende indre vinkler er kongruente, så $l \parallel l'$.

Bevis. La l og l' være to linjer med en transversal t slik at et par av alternerende indre vinkler er kongruente.



Vi velger A, B, C og A', B', C' som i def. 4.4.1 (Linjalpostulatet og plansep.-postulatet)

ha oss at $\angle A'B'B \cong \angle B'BC$.

Vi skal vise at $l \parallel l'$. (ingen punkt ligger på både l og l').

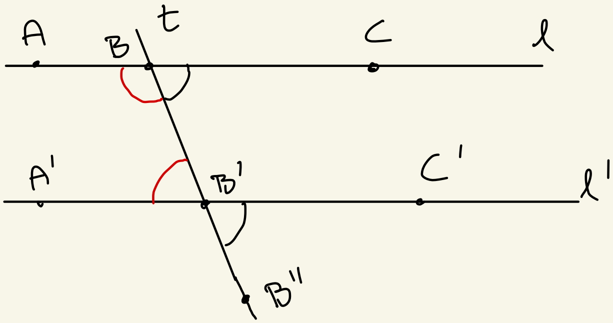
Anta at det eksisterer et punkt D s.a. ligger både på l og l'.

Dersom D ligger på samme side av t som C, så er $\angle A'B'B$ en ytre vinkel til $\Delta B'BD$, og $\angle B'BD$ er en ekstern indre vinkel, men dette motsier ytre-vinkel-teoremet (det sier at $\mu(\angle A'B'B) > \mu(\angle B'BD)$ og <u>ikke</u> at de er like store).

Dersom D ligger på samme side av t som A, er $\angle B'BC$ en ytre vinkel og $\angle A'B'B$ en ekstern indre vinkel. YVT gir motsigelse igjen.

Punktet D må ligge i et av halvplanene gitt av t, så hypotesen om at det finnes et punkt D på l og l' må forkastes.
Dermed er teoremet bevist. $\square$

Def. 4.4.3



$B * B' * B''$
Vinklene
$\{\angle B'BC, \angle B''B'C'\}$
er korresponderende vinkler.
De tre andre parene defineres tilsvarende.

Korollar 4.4.4 Dersom de korresponderende vinklene er kongruente, er $l \parallel l'$.

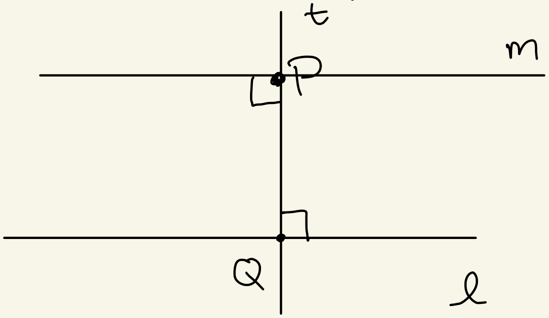
Korollar 4.4.5 Dersom l og l' er to linjer med transversal t slik at to ikke-alternerende indre vinkler på samme side av t er supplementer (vinkelsum på $180°$), da er $l \parallel l'$.

Viktig konsekvens av AIVT er eksistensen av parallelle linjer:

Korollar 4.4.6

Dersom l er en linje og P et eksternt punkt til l, så eksisterer det en linje m s.a. $P \in m$ og $m \parallel l$.

Bevis. Bruker dobbel normalkonstruksjon. La l være en linje og P et eksternt punkt til l.



Konstruer en normal fra P ned på l (Teorem 4.1.3). Kall krysningspunktet Q og $t = \overleftrightarrow{PQ}$.

Nå konstruer en normal til t gjennom P (teorem 3.5.9). Da følger det av AIVT at $m \parallel l$. $\square$

Korollar 4.4.7 Det elliptiske postulatet er falskt i alle modeller for nøytral geometri.

Korollar 4.4.8 Hvis $m \perp l$ og $n \perp l$, så er enten $m = n$ eller $m \parallel n$.