31/1-2019

Kapittel 4: Nøytral geometri

De seks aksiomene:

NG1 Det eksisterer minst to punkt.

NG2 Det går eksakt en linje mellom to punkt.

NG3 Det finnes en koordinatfunksjon $f: l \to \mathbb{R}$.

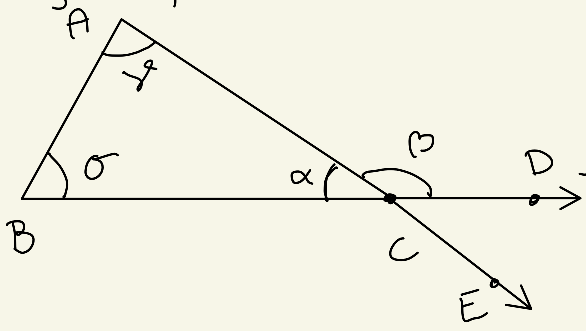
NG4 Enhver linje deler $\mathbb{P}$ i to halvplan.

NG5 Vi kan måle vinkler!

NG6 side-vinkel-side postulatet

4.1 Ytre-vinkel-teoremet og eksistens av normaler

Definisjon



I $\triangle ABC$ så er

- $\angle ABC$, $\angle BCA$ og $\angle CAB$ indre vinkler.
- en vinkel som gir et lineært par med en av de α

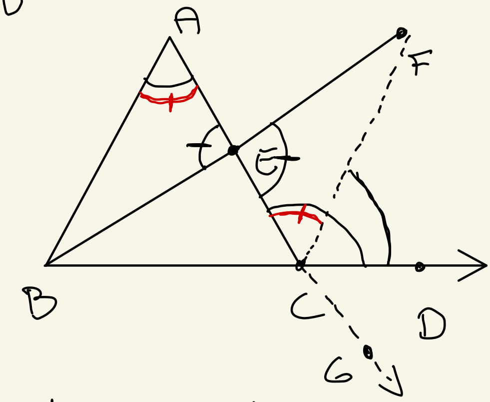
indre vinklene, en
ytre vinkel. (B)

- Dersom en vinkel gir et lineært par med en indre vinkel i et hjørne, så er vinklene i de to andre hjørnene kalt eksterne indre vinkler. (γ, σ)

Teorem (Ytre-vinkel-teoremet)
Dersom $\triangle ABC$ er en trekant og D er et punkt s.a. $\overrightarrow{CD}$ er en motsatt stråle til $\overrightarrow{CB}$, så
$\mu(\angle DCA) > \mu(\angle BAC)$ og
$\mu(\angle DCA) > \mu(\angle ABC)$.

Bevis. La $\triangle ABC$ være en trekant og D et punkt s.a. $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{CB}$ er motsatte stråler.
Vi skal vise at
$\mu(\angle DCA) > \mu(\angle BAC)$. Den andre ulikheten

kan vises på lignende måte.



La E være midtpunktet på $\overline{AC}$ (3.2.22) og velg F på $\overrightarrow{BE}$ s.a. $\overline{BE} \cong \overline{EF}$ (3.2.23, punktkonstruksjonspost.).

Vi vil bruke mellomliggenhetsteoremet for stråler (3.4.5).

Merk at $\angle BEA \cong \angle CEF$ (Vertikale vinkler er kongruente).

Så $\triangle BEA \cong \triangle FEC$ (SVS).

Så $\angle ACF \cong \angle BAC$.

Vi kan nå vise at $\mu(\angle FCA) < \mu(\angle DCA)$.

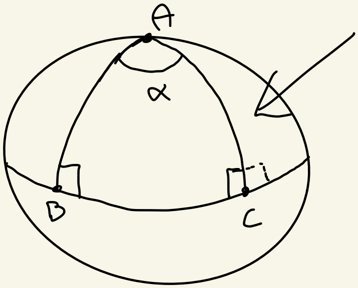
F og B er på motsatt side av $\overleftrightarrow{AC}$ (NG4), og B og D er på motsatt side av $\overleftrightarrow{AC}$, så F og D er på samme side.

Videre er A og E er på samme

side av $\overleftrightarrow{CD}$ (stråleteoremet), og E og F er på samme side av av $\overleftrightarrow{CD}$, så A og F er på samme side. Det viser at F er i det indre av $\angle ACD$. Så $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle FCA)$ fra mellomliggenhets-teoremet. Det følger at $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle BAC)$.

For $\mu(\angle DCA) > \mu(\angle CBA)$ går vi frem på samme måte. Bytter ut $\angle DCA$ med $\angle GCB$ s.a. $\overrightarrow{CG}$ er en motsatt stråle til $\overrightarrow{CA}$.

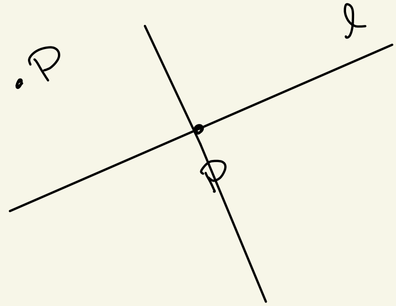
$\square$



Ytre-vinkel-teoremet holder ikke for $90° < \alpha < 180°$.

Nå: normaler eksisterer og de er unike.

Teorem
For enhver linje l og for ethvert punkt P så eksisterer det en unik linje m slik P ligger på m og $m \perp l$

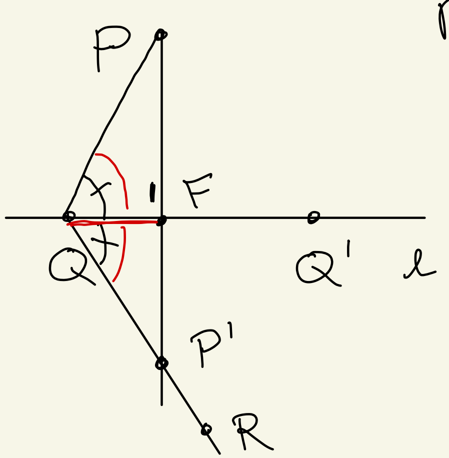


Terminologi: "Konstruer en normal fra P og ned på l" betyr å bruke dette teoremet.

Bevis. La l være en linje og P et punkt. Hvis $P \in l$, så holder teorem 3.5.9.
La P være et eksternt punkt til l.

Først eksistens, så unikhet.

Eksistens: Vi skal vise at $\exists$ en linje m s.a. $P \in m$ og $m \perp l$. Det finnes to distinkte punkt Q og Q' på l. (NG1, NG3). Det finnes et punkt R på motsatt side av l fra P (NG4) slik at $\angle Q'QP \cong \angle Q'QR$ (NG5). Velg P' på $\overrightarrow{QR}$ s.a. $\overline{QP} \cong \overline{QP'}$ (punktkonstruksjon).



La $m = \overleftrightarrow{PP'}$. Må vise at $\overleftrightarrow{PP'} \perp l$.
Vet at det eksisterer et punkt $F \in \overline{PP'} \cap l$ (NG4).

Hvis $Q = F$, så vil $\angle Q'FP$ og $\angle Q'FP'$ være et lineært par.

Så fra lineært-par-teoremet

$$\mu(\angle Q'FP) + \mu(\angle Q'FP') = 180°.$$

Ettersom de også er kongruente, må $\mu(\angle Q'FP) = \mu(\angle Q'FP')$

$$= 90°$$

$\Rightarrow m \perp l.$

$F \in \overrightarrow{QQ'}$: $\angle PQF = \angle PQQ'$ og

$\angle P'QF = \angle P'QQ'$,

så $\angle PQF \cong P'QQ'$.

Så, av SVS har vi at

$\triangle QPF \cong \triangle QP'F$, og dermed er $\angle QFP \cong \angle QFP'$.

Siden $\angle QFP$ og $\angle QFP'$ også er et lineært par, må $m \perp l$ i dette tilfellet også.

F i motsatt stråle til $\overrightarrow{QQ'}$:

$\angle PQF$ og $\angle PQQ'$ er supplementær-vinkler. Det er også $\angle P'QF$ og $\angle P'QQ'$, så igjen er

$\Delta FQP \cong \Delta FQP'$, så

$\angle PFQ \cong \angle P'FQ$, og siden de er supplementære må

$m(\angle PFQ) = m(P'FQ) = 90°$,

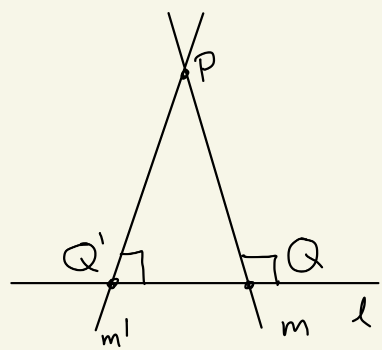
så $m \perp l$.

Unikhet: (ved motsigelse)

Anta at det finnes en annen linje m' slik at P ligger m' og $m' \perp l$. La Q' være punktet hvor m' krysser l, og Q hvor m krysser l.

Da er $Q' \neq Q$. (Ikke-parallelle linjer skjærer hverandre i et unikt punkt)

Så $\Delta PQQ'$ har en ytre vinkel med hjørne i Q som er $90°$, og



en indre vinkel i hjørnet Q' som måler $90°$. Men dette motsier Ytre-vinkel-teoremet, så vi må forkaste hypotesen og konkludere med at m' ikke finnes. □

4.2 Kongruensbetingelser for trekanter

Vi har SVS som et aksiom, men vi kan vise at andre kongruensbetingelser holder.

Skal se på VSV, VVS og SSS.

VSS holder ikke, men holder hvis vinkelen måler $90°$.