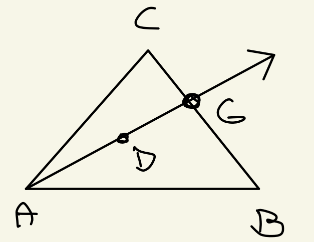
30/1-2019

Sist gang:

Tverrliggerteoremet

En stråle i det indre av en vinkel i en trekant $\triangle ABC$ må krysse den motsatte siden.

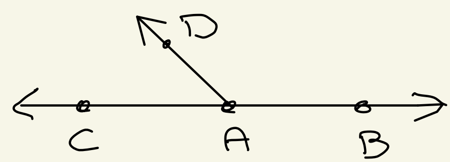


Det finnes G slik $G \in \overrightarrow{AD}$ og $G \in \overline{BC}$.

Lineært-par-teoremet

$$\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = 180^\circ$$

for lineære par.



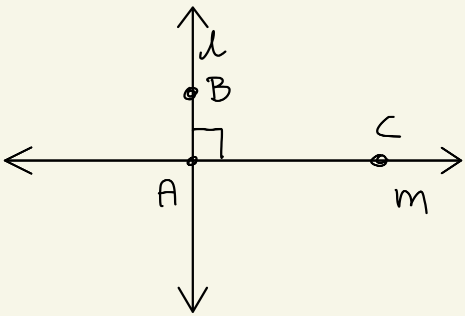
I dag:

- siste rest fra delkap. 3.5
- et siste aksiom i nøytral geometri som kombinerer vinkelmål og avstand

Definisjon

To linjer l og m ligger vinkelrett på hverandre (den ene ligger normalt på den andre) dersom det eksisterer et punkt A som ligger både på l og m, og $B \in l$, $C \in m$

slik at $\angle BAC$ er en rett vinkel ($m(\angle BAC) = 90°$). Notasjon $l \perp m$



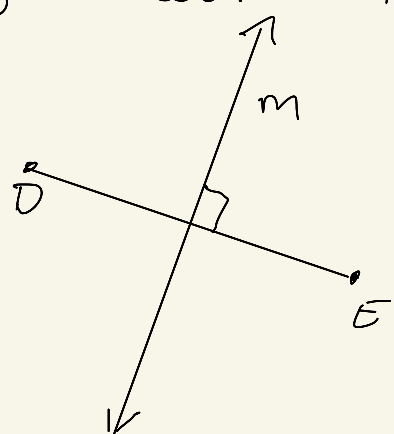
Teorem 3.5.9

Hvis l er en linje og P er et punkt på l, så eksisterer det eksakt en linje m slik at $P \in m$ og $l \perp m$.

Bevis: øving.

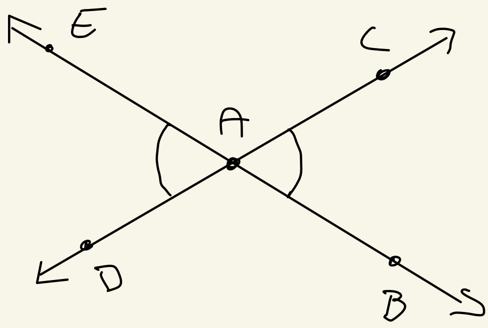
På et segment $\overline{DE}$, kan vi konstruere en halveringnormal. Den er unik.

(Teorem 3.5.11, som dere skal bevise.)



Definisjon (vertikale par)

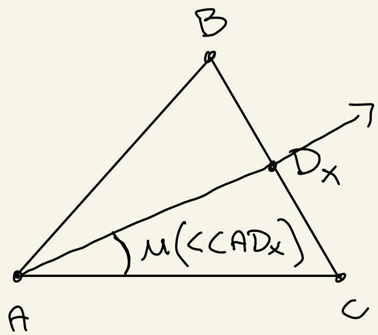
$\angle BAC$ og $\angle DAE$ er et vertikalt par dersom



$\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AE}$ er motsatte stråler og $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{AC}$ er motsatte stråler, eller $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ er motsatte stråler og $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AE}$ er motsatte stråler.

Teorem

Vertikale par (vinkler) er kongruente.



$d = BC$

Fra linjal postulatet vet vi at det eksisterer en 1-1 korrespondanse fra $\overline{BC}$ til $[0, d]$ slik at C svarer til 0 og B til d.

La D_x være punktet på $\overline{BC}$ som korresponderer til $x \in [0, d]$. ($CD_x = x$).

ha $f : [0, d] \to [0, \mu(\angle CAB)]$

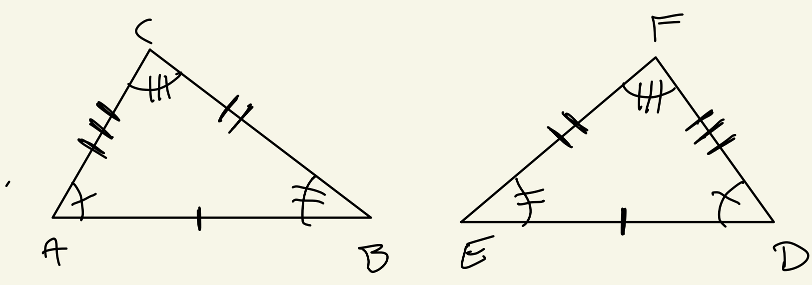
$$f(x) = \mu(\angle CAD_x).$$

Teorem (kontinuitetsaksiomet)
f er kontinuerlig. Det er også den inverse av f.

3.6 Side-vinkel-side postulatet (SVS)

Kombinerer kongruenthet for segmenter og vinkler slik at vi får kongruens av trekanter:

To trekanter er kongruente, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, dersom $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle DFE$ og $\angle CAB \cong \angle FDE$

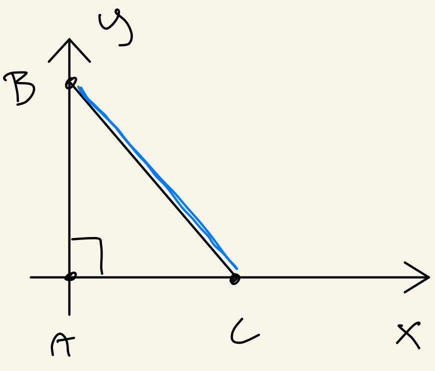


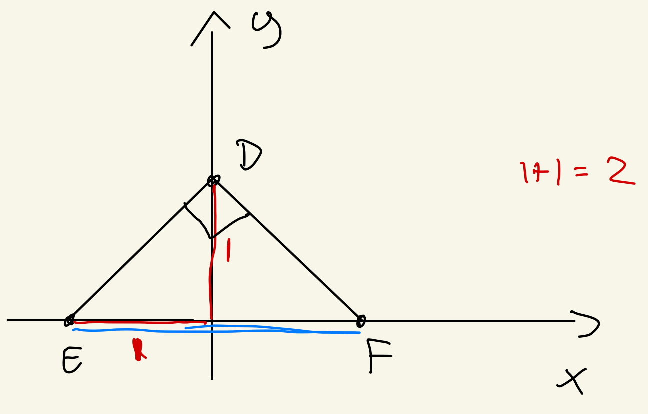
SVS: Dersom to sider og vinkelen mellom dem i en trekant er kongruente med to sider og vinkelen mellom i en annen trekant, så er trekantene kongruente.

Husk det kartesiske planet med taximetrikken.

Taximetrikken: $d(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

der $P = (x_1, y_1)$
$Q = (x_2, y_2)$.





$A = (0,0)$

$B = (0,2)$

$C = (2,0)$

$E = (-1, 0)$

$F = (1, 0)$

$D = (0, 1)$

Her er $AB = AC$
$= 2$
$= ED = DF$

Vi har to kongruente sider ($\overline{ED} \cong \overline{AB}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$), og de mellomliggende vinklene er kongruente ($m(\angle BAC) = m(\angle EDF) = 90°$),

men $\triangle ABC \not\cong \triangle DEF$ fordi

$BC = 4$, men $EF = 2$.

Det kartesiske planet med taxi-metrikken tilfredsstiller NG1 - NG5, men ikke SVS.
Det betyr at SVS er uavhengig av NG1 - NG5, så vi legger det til som vårt sjette postulat NG6:

Aksiom 3.6.3 Side-vinkel-side (SVS)
Dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter s.a. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ og $\angle ABC \cong \angle DEF$, da $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

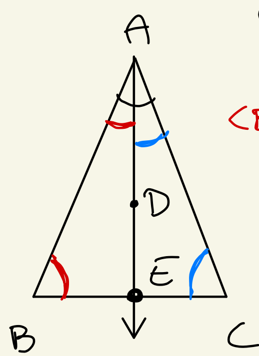
Et teorem om likebeinte trekanter for å illustrere bruk av SVS.

Definisjon

En trekant er likebeint dersom den har et par av kongruente sider. De to vinklene som ikke ligger mellom de kongruente sidene kalles grunnlinjevinklene.

Teorem (likebeint-trekant-teoremet)
Grunnlinjevinklene i en likebeint trekant er kongruente.

Omskriving: Dersom $\triangle ABC$ er en trekant og $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, så er $\angle ABC \cong \angle ACB$.



$\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\overline{AE} \cong \overline{AE}$

$\angle BAE \cong \angle EAC$

Bevis 1. La $\triangle ABC$ være en trekant slik at $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
La D være et punkt i det indre av $\angle BAC$ slik $\overrightarrow{AD}$ er halveringsstrålen til $\angle BAC$

(Tm 3.4.7). Da finnes det et punkt E på $\overline{BC}$ hvor $\overrightarrow{AD}$ krysser $\overline{BC}$ (tverrliggerteoremet).

Da er $\triangle BAE \cong \triangle CAE$ (SVS), så $\angle ABE \cong \angle ACE$ (def. på kongruens), og siden

$$\angle ABE = \angle ABC \quad \text{og} \quad \angle ACE = \angle ACB,$$

så har vi $\angle ABC \cong \angle ACB$.

$\square$

Et mer elegant bevis:

Bevis 2. La $\triangle ABC$ være en trekant slik $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Da er $\triangle BAC \cong \triangle CAB$ (SVS), så $\angle BAC \cong \angle CAB$. $\square$

Hva kan vi si om parallelle linjer i nøytralgeometri?

Husk:
- Det Euklidske parallellpostulatet (parallelle linjer er unik)
- Det elliptiske parallellpostulatet (ingen parallelle linjer)

- Det hyperbolske parallellpostulatet (minst en parallell linje.)

Nøytralgeometrien er sterk nok til å kunne vise eksistens av parallelle linjer. Det elliptiske post. er derfor ikke konsistent med de andre aksiomene NG1 - NG6.

De to andre postulatene gir enten Euklidsk eller hyperbolsk geometri. Her finnes det modeller.

Tolkninger så langt:

- endelige geometrier ✗ linjalpostulatet gir uendelig mange punkt.
- sferen ✗ Bryter med insidens og linjal
- Rasjonale planet ✗ Bryter med linjal. ingen 1-1 $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.
- "taxi"-geometrien ✗ Bryter SVS
- Kartesiske planet ✓
- Klein disken ✓

(Her må vi måle avstand på en lur måte.)

Så, både det kartesiske planet og Klein disken, med passende måter å måle avstand på, er modeller for nøytral geometri. Videre er det kartesiske planet en modell for Euklidsk geometri, og Klein disken en modell for hyperbolsk geometri.