I går:

24. januar

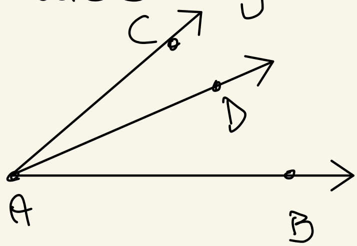
- indre av vinkel
- mellomliggenhet for stråler
- mellomliggenhet for stråler og punkt er konsistente
- def. trekant
- Det femte aksiomet i nøytral geometri Vinkelmålpostulatet (NG5) sier at vi kan måle vinkler
- Mellomliggenhet og vinkelmål:

$\mu(\angle BAD) < \mu(\angle BAC)$ hviss $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

I dag: se på delkap 3.5

- Tverrliggerteoremet - hvis en stråle er i det indre av en trekant, så må den krysse den motsatte siden.
- Lineært-par-teoremet - en slags generalisering av vinkeladdisjons-postulatet (NG5, del 4.)

Aller først, definisjon av halveringsstråle:



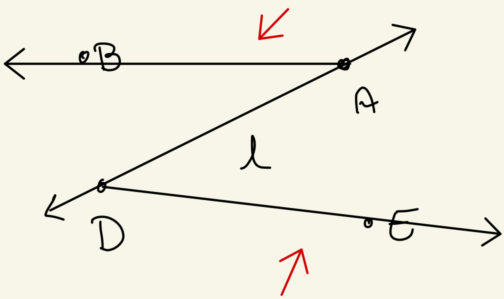
$\overrightarrow{AD}$ er en halveringsstråle hvis $\mu(\angle CAD) = \mu(\angle DAB)$

Teorem

Halveringsstrålen eksisterer og er unik.

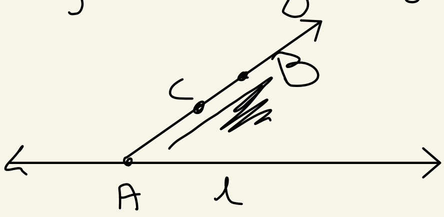
Delkap 3.5

Z-teoremet

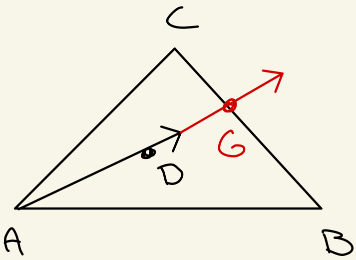


La l være en linje, og la A og D være ulike punkt på l. Dersom B og E ligger på motsatt side av l, så vil $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DE} = \emptyset$.

Bevis. En konsekvens av stråleteoremet fra i går.



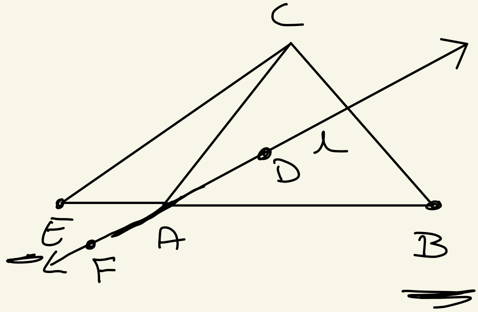
Tverrliggerteoremet (3.5.2)



Dersom $\triangle ABC$ er en trekant og D er et punkt i det indre av $\angle CAB$, er det et punkt G slik at G ligger på $\overline{BC}$ og $\overrightarrow{AD}$.

Bevis. Anta at $\triangle ABC$ er en trekant og D ligger i det indre av $\angle BAC$.

Velger to punkt E og F slik at $E * A * B$ og $F * A * D$ (NG4).



ha $l = \overleftrightarrow{FD}$.

Siden D er i det indre av $\angle CAB$, så ligger hverken C eller B på l. Dermed kan vi bruke Pasch's aksiom på $\triangle CEB$, så l krysser enten $\overline{EC}$ eller $\overline{BC}$.

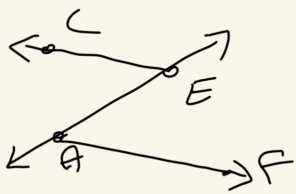
Må vise at det er $\overrightarrow{AD}$, og ikke $\overrightarrow{AF}$, som krysser $\overline{EC}$ eller $\overline{BC}$, og at $\overrightarrow{AD}$ ikke krysser $\overline{EC}$.

Altså, at $\overrightarrow{AF} \cap \overline{EC} = \emptyset$, $\overrightarrow{AF} \cap \overline{BC} = \emptyset$

og $\overrightarrow{AD} \cap \overline{EC}$.

Hvordan? Tre runder med Z-teoremet.

Først: at $\overrightarrow{AF} \cap \overline{EC} = \emptyset$. $F * A * D$, så F og D er på motsatt side av $\overleftrightarrow{AB}$ (NG4). I tillegg så er C og D på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ (siden D er i det indre av $\angle BAC$). Det følger at C og F er på motsatt side av $\overleftrightarrow{AB}$.



så da vet vi at $\overrightarrow{EC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset$.

$\Rightarrow \overline{EC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset$.

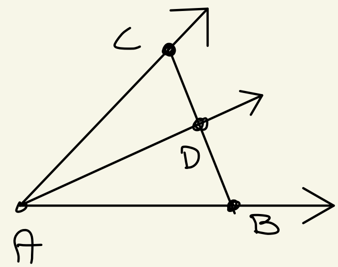
Så: at $\overrightarrow{AF} \cap \overline{BC} = \emptyset$. C og F er på motsatt side av $\overleftrightarrow{AB}$, så

$$\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset \Rightarrow \overline{BC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset.$$

Til slutt: at $\overrightarrow{AD} \cap \overline{EC} = \emptyset$ kan vises på lignende måte.

Så vi kan konkludere at $\overrightarrow{AD}$ må krysse $\overline{BC}$. $\square$

Teorem 3.3.10 sier at hvis $\overrightarrow{AD}$ snitter det indre av $\overline{BC}$, så er D i det indre av $\angle BAC$.



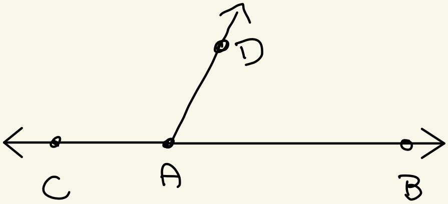
Teorem

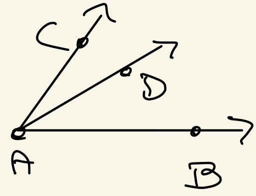
Et punkt D er i det indre av $\angle BAC$ hviss $\overrightarrow{AD}$ krysser det indre av $\overline{BC}$ (dvs. $\overline{BC}$ minus endepunktene).

Bevis. Kombinere tverrliggerteoremet og teorem 3.3.10.

Definisjon

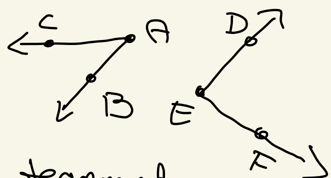
To vinkler $\angle BAD$ og $\angle DAC$ er et lineært par dersom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er motsatte stråler.





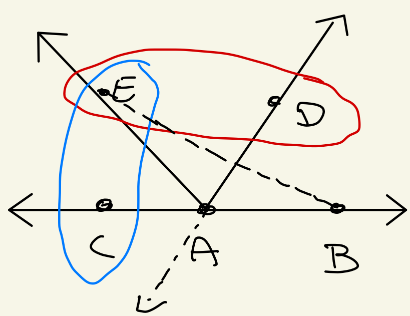
Teorem (lineært-par-teoremet)
Dersom $\angle CAD$ og $\angle BAD$ er et lineært par, så er $\mu(\angle CAD) + \mu(\angle BAD)$
$= 180°$.

<u>Definisjon</u>
To vinkler $\angle CAB$ og $\angle DEF$ er supplementærvinkler dersom
$\mu(\angle CAB) + \mu(\angle DEF) = 180°$



Beviset av lineært-par-teoremet er delt i to. Starter med et lemma.

Lemma 3.5.7
Hvis $C*A*B$ og D er i det indre av $\angle EAB$, så er E i det indre av $\angle DAC$.



Bevis. Må vise at E og D er på samme side av $\overleftrightarrow{AC}$ og at E og C er på samme side av $\overleftrightarrow{AD}$ (Fra def. av indre av en vinkel).

D er i det indre av $\angle BAE$, så E og D er på samme side av $\overleftrightarrow{AC}$.

Fra tverrligger teoremet vet vi at $\overrightarrow{AD}$ krysser $\overline{BE}$, så E og B er på motsatt side av $\overleftrightarrow{AD}$ (NG4, $\overline{BE} \cap \overleftrightarrow{AD} \neq \emptyset$).

Siden $C * A * B$, så må C og B være på motsatte sider av $\overleftrightarrow{AD}$. Da må E og C være på samme side av $\overleftrightarrow{AD}$.

Bevis av lineært-par-teoremet.

La $\angle BAD$ og $\angle DAC$ være et lineært par. Da er $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ motsatte stråler.

La $\alpha = \mu(\angle BAD)$ og $\beta = \mu(\angle DAC)$.

Vi har enten

1. $\alpha+\beta < 180$
2. $\alpha+\beta > 180$

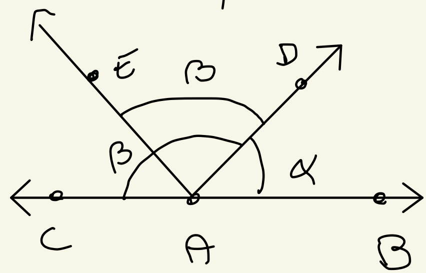
Shal vise at disse to gir oss motsigelser.

eller

$\alpha+\beta = 180$

1. Anta at $\alpha+\beta < 180$.

Fra NG5, del 3 så finnes det et punkt E, på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ som D, slik at $\mu(\angle BAE) = \alpha+\beta$.



Fra mellomliggenhets-teoremet for stråler (3.4.5), vet vi at D er i det indre av $\angle BAE$.

så $\underbrace{\mu(\angle BAD)}_{=\alpha} + \mu(\angle EAD) = \overbrace{\mu(\angle BAE)}^{=\alpha+\beta}$

(NG5, del 4)

$\Rightarrow \mu(\angle EAD) = \beta$.

Men siden E er i det indre av $\angle DAC$ (lemma 3.5.7), så har vi

$$\mu(\angle CAE) + \underbrace{\mu(\angle EAD)}_{=\beta} = \underbrace{\mu(\angle CAD)}_{=\beta}$$

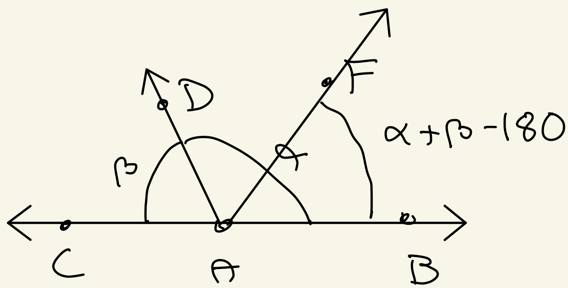
$\Rightarrow \mu(\angle CAE) = 0$. Dette motsier

NG5, del 1 og 2, så

$\alpha+\beta < 180$ er umulig.

2. Anta $\alpha+\beta > 180$.

Velg en F på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ slik at $\mu(\angle BAF) = (\alpha+\beta) - 180$ (NG5, del 3).



$\beta < 180$, så

$\alpha+\beta-180 < \alpha$.

Fra teorem 3.4.5 så F er i det indre $\angle DAB$, så

$$\mu(\angle BAF) + \mu(\angle FAD) = \mu(\angle DAB)$$

så $\mu(\angle FAD) = 180 - \beta$.

Fra lemma 3.5.7, så er D i det indre av $\angle CAF$,

$$\mu(\angle FAD) + \mu(\angle DAC) = \mu(\angle FAC).$$

$$\Rightarrow \mu(\angle FAC) = 180 - \beta + \beta = 180$$

Det motsier NG5, så $\alpha+\beta>180$ er umulig.

Kan konkludere at $\alpha+\beta=180$.

$\square$

(Vi hadde litt dårlig tid på slutten her, så se gjerne på siste halvdel av beviset i boka.)