23. januar

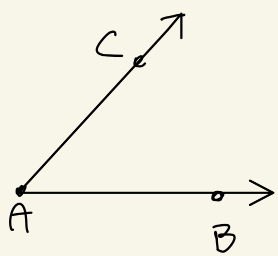
Sist uke

De fire første aksiomene i nøytral geometri:

- Eksistenspostulatet (NG1) Det eksisterer minst to punkt.
- Insidenspostulatet (NG2) Det er eksakt en linje mellom to punkt.
- Linjalpostulatet (NG3) Det finnes en koord. funk. $f: l \to \mathbb{R}$
- Planseparasjonspostulatet (NG4) Enhver linje deler planet i to.

Vinkel

Unionen av to ikke-motsatte stråler som starter i samme punkt.

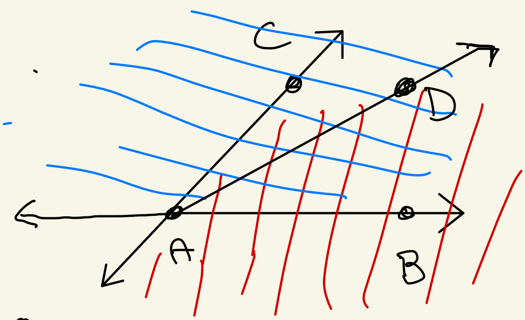


$\angle CAB$

I dag:
- studere vinkler
- introdusere det femte aksiomet om det siste udefinerte begrepet: vinkelmål.

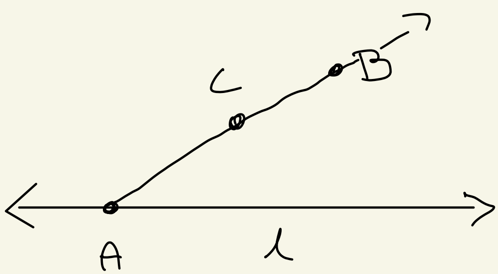
Det indre av en vinkel $\angle BAC$ er $H_B \cap H_C$ der

$B \in H_B$ og $C \in H_C$.



3.3.8 $\overrightarrow{AD}$ er mellom $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$ dersom D ligger i det indre av vinkelen $\angle CAB$.

Teorem 3.3.9 Stråleteoremet



La l være en linje, A et punkt på l og B et eksternt punkt til l. Dersom C ligger på $\overrightarrow{AB}$ og $C \neq A$, da er B og C på samme side av l.

Bevis. Antar hypotesen.

Må vise $\overline{BC} \cap \ell \neq \emptyset$ (samme side).

Har to tilfeller:

1. $A * C * B$
2. $A * B * C$

(def. av stråle)

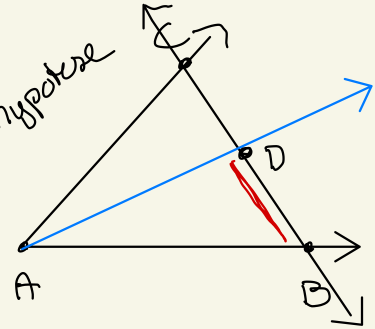
1. Anta $A * C * B$. Da er ikke A mellom B og C (Kor 3.2.19). Så $A \notin \overline{BC}$. Og ℓ og $\overleftrightarrow{AB}$ har bare et punkt felles (Teorem 3.1.7), så det punktet må være A. Så $\overline{BC} \cap \ell = \emptyset$.

2. Anta $A * B * C$. Samme bevis som 1. Rollene til B og C reversert.

Mellomliggenhet for linjer og punkter er konsistente.

Teorem 3.3.10
La A, B, C være tre ikke-kollineære punkt, og la D være et punkt på $\overleftrightarrow{BC}$.

hypotese



Da ligger D mellom B og C hviss (hvis og bare hvis) strålen $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Bevis. Anta hypotesen.
Må vise begge retninger.

Først: Anta $B * D * C$. Da er C og D på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ (Tm. 3.3.9), og B og D på samme side av $\overleftrightarrow{AC}$. Derfor ligger D i det indre av $\angle BAC$ (definisjon av indre), og ut ifra def. av mellomliggenhet for stråler så er $\overrightarrow{AD}$ mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Motsatt: Anta at $\overrightarrow{AD}$ er mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Da er D i det indre av $\angle BAC$ (definisjon), så B og D er på samme side av $\overleftrightarrow{AC}$, så C ligger ikke på $\overline{BD}$ (planseparasjons postulatet).

Og lignende, B er ikke $\overline{CD}$.

Har tre kollineære punkt B, C, D, hvor B ikke er mellom C og D, og C ikke er mellom B og D, så D må ligge mellom B og C.

(Kor. 3.2.19).

3.2.19: Hvis A, B, C er kollineære, så ligger eksakt et punkt mellom de to andre.

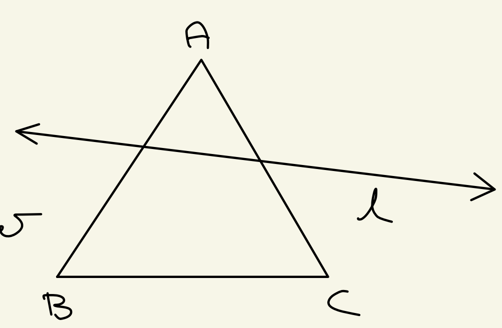
Definisjon av trekant

La A, B, C være tre ikke-kollineære punkt. Da er ΔABC unionen av de tre segmentene $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}.$$

Pasch's aksiom

$\underbrace{\text{La } \Delta ABC \text{ være en trekant, og } l \text{ en linje slik at ingen av } A, B, C \text{ ligger på } l}_{\text{hypotese}}$;



Dersom l krysser $\overline{AB}$, så vil l også krysse $\overline{AC}$ eller $\overline{BC}$.

Bevis. Anta hypotesen.
La H_1 og H_2 være de to halvplanene definert av l (NG4). Punktene A og B ligger i motsatte halvplan. ($\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$, prop. 3.3.4). La $A \in H_1$ og $B \in H_2$. Vi har enten $C \in H_1$ eller $C \in H_2$. (NG4). Dersom $C \in H_1$, vil $\overline{BC} \cap l = \emptyset$ og $\overline{AC} \cap l \neq \emptyset$.
Dersom $C \in H_2$, vil $\overline{AC} \cap l = \emptyset$ o $\overline{BC} \cap l \neq \emptyset$.

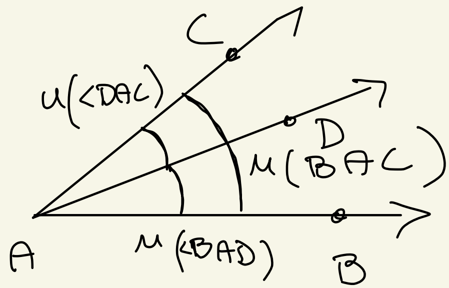
$\square$

Aksiom 3.4.1 Gradskivepostulatet NG5
For enhver vinkel $\angle BAC$ så finnes det et reelt tall $\mu(\angle BAC)$, slik at
1. $0° \leq \mu(\angle BAC) < 180°$
2. $\mu(\angle BAC) = 0°$ hviss $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

3. (Vinkelkonstruksjon) For ethvert reelt tall $r \in (0,180)$, og for ethvert halvplan begrenset av $\overleftrightarrow{AB}$, så eksisterer det en unik stråle $\overrightarrow{AE}$ slik at $E \in H$ og $\mu(\angle BAE) = r^\circ$ (merk: E ikke unik.)

4. (Vinkeladdisjon) Hvis $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$, så

$$\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = \mu(\angle BAC)$$

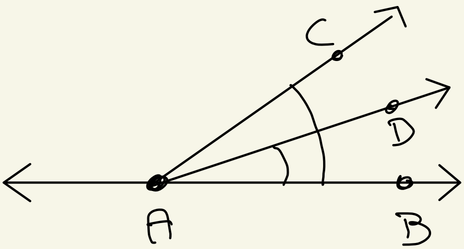


Kongruente vinkler

To vinkler $\angle ABC$, $\angle DEF$ er kongruente, $\angle ABC \cong \angle DEF$, dersom $\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DEF)$.

Mellomliggenhet for stråler kan relateres til vinkelmål på forventet måte:

Teorem 3.4.5



La A, B, C, D være fire ulike punkt slik at C og D er på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$. Da er $\mu(\angle BAD) < \mu(\angle BAC)$ hviss $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$.

Trenger først et lemma:

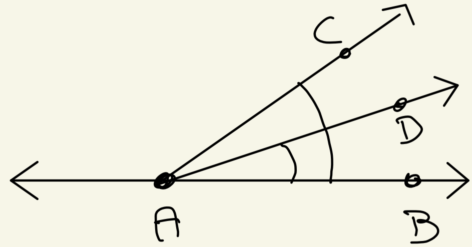
Lemma 3.4.4

La A, B, C, D være fire ulike punkt slik at C og D er på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$, og D ikke er på $\overrightarrow{AC}$. Da vil enten C være indre av $\angle BAD$ eller D i det indre av $\angle BAC$.

Bevis: Les på egen hånd.

Bevis av teorem 3.4.5. Anta at vi har fire ulike punkt A, B, C, D slik at C og D er på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ (hypotese).

Først, anta at $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$.



Da er $\mu(\angle BAD) + \underbrace{\mu(\angle DAC)}_{>0} = \mu(\angle CAB)$ (NG5).

og $\mu(\angle DAC) > 0$. (NG5)

så $\mu(\angle BAD) < \mu(\angle CAB)$ (algebra).

Motsatt: Anta $\overrightarrow{AD}$ ikke ligger mellom $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AB}$. (Skal vise at $\mu(\angle BAD) \geq \mu(\angle CAB)$.)

Hvis D ligger på $\overrightarrow{AC}$, så er $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ slik at $\mu(\angle BAD) = \mu(\angle CAB)$.

Hvis ikke $D \in \overrightarrow{AC}$, så er C i det indre av $\angle BAD$. (lemma 3.4.4),

så $\mu(\angle BAD) > \mu(\angle BAC)$.

$\square$