Uke 3, forelesning 2

Thursday, 17 January 2019 08:08

Fra i går:

Eksistenspostulatet (NG1)
Det finnes minst to punkt.

Insidenspostulatet (NG2)
Gjennom to distinkte punkt går eksakt en linje.

Linjalpostulatet (NG3)
Enhver linje har minst en koordinatfunksjon.

(på kortform)

Snakket om avstanden PQ, fra P til Q, slik at $PQ = |x-y|$, hvor P korresponderer til x og Q til y. (NG3)

PQ er en metrikk.

En (semi-) metrikk er en funksjon $d: \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ slik at

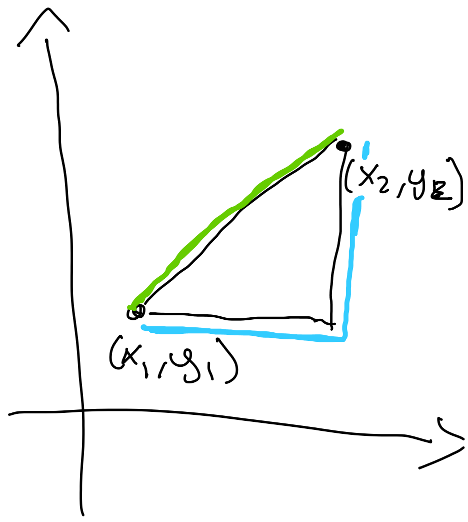
1. $d(P,Q) = d(Q,P)$
2. $d(P,Q) \geq 0$ for enhver P, Q.
3. $d(P,Q) = 0$ hvis og bare hvis $P = Q$.

(Vi viste i går at PQ oppfyller 1.-3.)

Korollar 3.2.8. $A * C * B$ hvis og bare hvis $B * C * A$.

Eksempler på metrikker:

Avstand mellom $(x_1, y_1) = P$ og $(x_2, y_2) = Q$ i det kartesiske planet.



Euklidsk metrikk

$$d_E(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Taxi-metrikken

$$d_T(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Andre del av linjalpostulatet

1-1 korrespondanse fra ℓ til $\mathbb{R}$ betyr at det finnes en funksjon $f : \ell \to \mathbb{R}$ slik f er 1-1 og på (bijeksjon).

Sier: For ethvert par $Q, P \in \ell$, så er

$$PQ = |f(P) - f(Q)|.$$

Definisjon 3.2.13

En 1-1 korrespondanse $f : \ell \to \mathbb{R}$ slik at $PQ = |f(P) - f(Q)|$ for enhver $P, Q \in \ell$, kalles en koordinatfunksjon for

... koordinatfunksjon for l. $f(P)$ er koordinaten til P.

Eksempel i Euklidsk metrikk:

Har $y = mx + b$ så lenge linjen ikke er vertikal.

Koord. funk. $f: l \to \mathbb{R}$ kan være

$$f(x, y) = x \cdot \sqrt{1 + m^2}$$

(Sjekk selv ved å bruke den Euklidske metrikken d_E.)

Man kan alltid finne en koordinat-funksjon som starter i 0 ved et punkt P:

Teorem 3.2.16 (linjalplasseringspostulatet)

For ethvert par av ulike punkt P og Q, så eksisterer det en koord. funk. $f: \overleftrightarrow{PQ} \to \mathbb{R}$ slik at $f(P) = 0$ og $f(Q) > 0$.

Bevis: Fiks to ulike punkt P og Q. (hyp.) og la $l = \overleftrightarrow{PQ}$ (NG2).

Det finnes en koord. funk. $g: l \to \mathbb{R}$ (NG3).

Definer $c = -g(P)$ og

$h: l \to \mathbb{R}$ som $h(R) = g(R) + c$ $\forall R \in l$.

Da vil h være en koord. funk.
(øvingsoppgave 3.2.12).
Merk at $h(P) = g(P) - g(P) = 0$,
og $h(Q) \neq 0$ (h er 1-1), så
enten er $h(Q) > 0$ eller
$h(Q) < 0$.
Hvis $h(Q) > 0$, så vil $f = h$
være vår koord. funk.
Hvis $h(Q) < 0$, la $f: l \to \mathbb{R}$
være $f(R) = -h(R)$.
Dette er også en koord. funk.
(øv. 3.2.12).

Videre er $f(P) = 0$, $f(Q) > 0$.

$\square$

Mellomliggenhet

Naturlig å koble til koordinatfunksjoner.

$A * B * C$

hvis og bare hvis

$f(A) < f(B) < f(C)$

eller

$f(C) < f(B) < f(A)$.

A, B, C ligger på l.
$f: l \to \mathbb{R}$ er en koordinatfunksjon til l.

(Teorem 3.2.17)

Midtpunkt

La A og B være to ulike punkt. Da er M et midtpunkt $\overline{AB}$ dersom $A * M * B$ og $AM = MB$.

Teorem 3.2.22
Hvis A og B er ulike punkt, så eksisterer det et unikt punkt M slik at M er midtpunktet av $\overline{AB}$.

Linjalpostulatet (NG3) trengs som oftest for å lokalisere et punkt med riktig avstand ut i fra en stråle $\overrightarrow{AB}$

Teorem 3.2.23 (Punktkonstruksjons-postulatet)
Dersom A og B er ulike punkt og $d \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, så eksisterer det et unikt punkt C slik at C ligger på $\overrightarrow{AB}$ og $AC = d$.

Bevis. La A og B være ulike punkt og $d \geq 0$, $d \in \mathbb{R}$.
Skal vise to ting:
1. Det eksisterer en C på $\overrightarrow{AB}$ s.a. $AC = d$.
2. Det finnes bare et slikt punkt

1. Fra linjalplasseringspostulatet: Det eksisterer en koord. funk. $f : \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ slik at $f(A) = 0$, $f(B) > 0$.
f er på, så $\exists$ et punkt $C \in \overleftrightarrow{AB}$ s.a. $f(C) = d$.
Videre er $C \in \overrightarrow{AB}$ (Kor. 3.2.20, $l = \overleftrightarrow{AB}$, så vil $\overrightarrow{AB} = \{P \in l \mid f(P) \geq 0\}$)
Da er $AC = |f(A) - f(C)| = |0 - d|$
$= d$.

2. Anta C' er et punkt på $\overrightarrow{AB}$ s.a. $AC' = d$. Da er $f(C') \geq 0$.
(Kor. 3.2.20)

Og

$$|f(C')| = |0 - f(C')|$$
$$= |f(A) - f(C')| = AC' = d,$$

så $f(C') = f(C)$, og siden f er en bijeksjon så betyr det at $C' = C$.

$\square$

NG3 sikrer at det det ikke er "hull" i linjene våre. (f er en bijeksjon fra l til $\mathbb{R}$.)

Eksempel: Det rasjonale planet.

$$\ell = \{(r,s) \mid r,s \in \mathbb{Q},\ ar+bs+c=0\}$$

Den euklidske metrikken er en metrikk i det rasjonale planet, men det finnes ingen bijeksjon mellom $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$, så det finnes ingen koordinatfunksjon.

Se eksempel 3.2.26 i boka for en bemerkning ang. Euklids første teorem.

3.3. Planseparasjon

Handler om det fjerde udefinerte begrepet; halv-plan.

Definisjon 3.3.1

En mengde S av punkter er en konveks mengde dersom for ethvert par

A, B ∈ S, så er hele $\overline{AB}$ i S.

Konveks ikke konveks

Aksiom 3.3.2 (NG4) Planseparasjonspostulatet
Enhver linje l deler planet $\mathbb{P}$ i to disjunkte, ikke-tomme mengder H_1 og H_2 (halvplan). H_1 og H_2 er konvekse, og dersom $P \in H_1$, $Q \in H_2$, så vil $\overline{PQ}$ krysse l.

Med symboler:

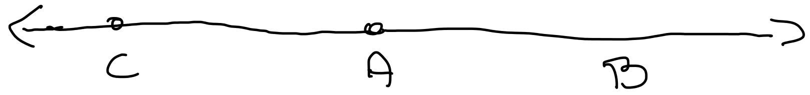
- $H_1 \cup H_2 = \mathbb{P} \setminus l$
- $H_1 \cap H_2 = \emptyset$
- $H_1 \neq \emptyset$, $H_2 \neq \emptyset$
- Hvis $A \in H_1$, $B \in H_1$, så $\overline{AB} \subseteq H_1$, og $\overline{AB} \cap l = \emptyset$, og tilsvarende hvis $A \in H_2$ og $B \in H_2$.
- Hvis $A \in H_1$, $B \in H_2$, så $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$.

Samme side / motsatt side (prop. 3.3.4)
A, B er på samme side hvis og bare hvis $\overline{AB} \cap l = \emptyset$. De er på motsatt side av l hviss $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$.

Definisjon av motsatte stråler

Definisjon av motsatte stråler:

To stråler $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er motsatte stråler dersom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er ulike, men $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AB}$.



Definisjon av vinkel:

En vinkel er unionen av to ikke-motsatte stråler $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, med samme endepunkt A. A er hjørnet.

$\angle CAB$, $\angle BAC$. (Notasjon)

$\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er sidene.