Uke 3, forelesning 1

Wednesday, 9 January 2019 13:35

Å skrive bevis

Et bevis er en rekke logiske argument som starter med en hypotese og avslutter med en konklusjon.

Hvert steg må begrunnes med

- hypotesen
- aksiomene
- tidligere teorem
- definisjonene
- tidligere steg
- regler i logikk

Bevis.

□

Direkte bevis:

hypotese → konklusjon

P → Q

Indirekte bevis:

Vil utelukke at P er sann samtidig som Q er usann.

Antar P sann og Q usann, og

Ved at man får en motsigelse.

Merk at et direkte bevis av det kontrapositive ikke er det samme. Består av ikke Q ⇒ ikke P.

IA 1 For ethvert par av distinkte punkter P og Q, så eksisterer det en unik linje l slik at både P og Q ligger på l.

IA 2 For enhver linje l finnes det minst to distinkte punkt P og Q slik at P og Q ligger på l.

IA 3 Det finnes tre punkt som er ikke-kollineære.

Definisjon: To linjer skjærer hverandre dersom det eksisterer et punkt som ligger på begge linjene.

Definisjon: To linjer l og m er parallell dersom det ikke eksisterer et punkt P slik at P ligger både på l og m.

Teorem 2.6.2 Linjer som ikke er parallelle skjærer hverandre i ett punkt.

Omformulering: Dersom l og m er

to ikke-parallelle linjer, så eksisterer det et unikt punkt P slik at P ligger både på m og l.

Bevis. La l og m være to linjer slik at $l \neq m$ og $l \nparallel m$.
Skal vise at:

1. Det finnes et punkt P som ligger både på m og l.
2. Det finnes kun et slikt punkt.

1. Ved negasjon av definisjonen av Parallelle linjer, så vet man at det eksisterer et punkt P slik at P ligger både på l og m.

2. Anta at det eksisterer et punkt Q, som ikke er P, slik at Q også ligger på l og m. (RAA). Da er linjen l den unike linjen slik at P og Q ligger på l (IA1), og linjen m er også den unike linjen slik at P og Q ligger på m. Så $l = m$ (unikhet). Men dette

Først, hva gir hypotesen deg?

Hva trenger du å vise? (For å rydde i tankene og forklare leseren hva man skal gjøre.)

Direkte bevis

Indirekte bevis (RAA)

[illegible]
motsier hypotesen om
at l og m er to ulike
linjer. Derfor må antagelsen
forkastes, og konklusjonen
er at det ikke finnes et
slik punkt Q. $\square$

Kapittel 3 Aksiomer for plangeometri

3.1

Udefinerte begrep:
- punkt
- linje
- avstand
- halv-plan
- vinkelmål

Aksiom 3.1.1 (NG1) Eksistenspostulatet
Samlingen av alle punkt er en ikke-tom mengde. Det er mer enn et punkt i den mengden.

Definisjon 3.1.2
Mengden av alle punkt kalles planet.
Notasjon: $\mathbb{P}$

Aksiom 3.1.3 (NG2) Insidenspostulatet
Enhver linje er en mengde bestående av punkter. For ethvert par av punkter A og B, så finnes det akkurat en linje l slik at $A \in l$
og $B \in l$

og $B \in l$.

Notasjon linje: $\overleftrightarrow{AB}$

Definisjon av "å ligge på" / "være insident med":
Et punkt P ligger på l dersom
$P \in l$.

Definisjon av eksternt punkt:
P er et eksternt punkt til linjen l
dersom P ikke ligger på l.

Definisjon av to parallelle linjer:
To linjer m og l er parallelle, $l \parallel m$,
dersom det eksisterer et punkt P
som ligger både på m og l.
$(l \cap m = \emptyset.)$

Teorem 3.1.7 Hvis l og m er to ulike, ikke-parallelle linjer, så eksisterer det ett punkt P slik at P ligger både på l og m.

Bevis: Beviset er det samme som i insidensgeometri. Bruk NG2.

Har enten $l = m$, $l \parallel m$ eller
$$l \cap m = \{P\}.$$

3.2 Avstand og linjalpostulatet
Hva antar vi om avstand?

Aksiom 3.2.1 (NG3) For et hvert par av punkter P og Q, så eksisterer det et reelt tall PQ, kalt avstanden fra P til Q.
For enhver linje l så er det en en-til-en korrespondanse fra l til $\mathbb{R}$ slik at dersom P og Q er punkter på l som korresponderer med reelle tall x og y, respektivt, så vil
$PQ = |x - y|$.

Fem definisjoner:

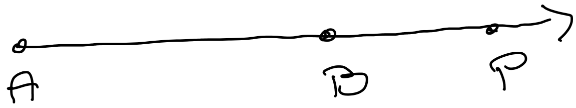
3.2.2 Tre punkter A, B og C er kollineære dersom det eksisterer en linje l slik at $A, B, C \in l$.

3.2.3 La A, B og C være tre ulike punkt. Punktet C er mellom A og B dersom A, B og C er kollineære og $AC + CB = AB$.
Notasjon: $A * C * B$

3.24 <u>Linjesegment</u>

Et linjesegment, $\overline{AB}$, er definert som
$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P \mid A * P * B\}$.
En stråle, $\overrightarrow{AB}$, er definert som

$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{P \mid A * B * P\}$



3.2.5 Lengden av segmentet $\overline{AB}$ er AB (avstanden fra A til B).
To segmenter $\overline{AB}$ og $\overline{CD}$ er kongruente ($\overline{AB} \cong \overline{CD}$) dersom de er like lange.

3.2.6. A og B kalles endepunktene til $\overline{AB}$, og alle andre punkt mellom A og B kalles indre punkt.

Teorem 3.2.7

Dersom P og Q er to punkter, så

1. $PQ = QP$
2. $PQ \geq 0$
3. $PQ = 0$ hvis og bare hvis $P = Q$.

Bevis. La P og Q være to punkt (hypotese).

Først vil vi vise at det eksisterer en linje l slik at både P og Q ligger på l. Enten $P = Q$ eller $P \neq Q$.

Anta $P \neq Q$. Da vet vi fra NG2 (Insidenspostulatet) at det finnes akkurat en linje $\overleftrightarrow{PQ}$ $(= l)$

slik at P og Q ligger på l.
Dersom $P = Q$, så eksisterer det et punkt R, $R \neq P$ (N61, eksistenspostulatet). I dette tilfellet har vi $l = \overleftrightarrow{PR}$

Fra linjalpostulatet (N63) så vet vi at det eksisterer en en-til-en korrespondanse fra l til $\mathbb{R}$.
P og Q korresponderer til reelle tall x og y, med $PQ = |x-y|$, og $QP = |y-x|$.
Fra algebra $|x-y| = |y-x|$, som betyr at $PQ = QP$.
Også fra algebra $|x-y| \geq 0$, så $PQ \geq 0$.

Anta $PQ = 0$, det vil si $|x-y| = 0$, som betyr at $x = y$ (algebra). Fra en-til-en korrespondansen betyr det at $P = Q$.
Anta $P = Q$. Da vil $x = y$, som gir $PQ = |x-x| = 0$.

$\square$