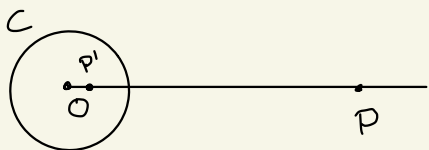


1 går:

Inversjonen i  $C = C(O, r)$ ,  $I_{O,r}$ , er

s.a.  $P' = I_{O,r}(P)$  er punktet på  $\overrightarrow{OP}$

s.a.  $OP \cdot OP' = r^2$ .

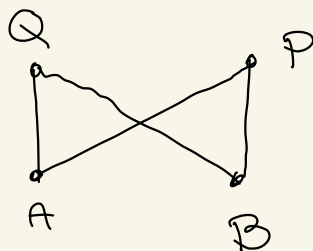


fire ulike punkt.

Kryssforholdet

Gitt  $A, B, P$  og  $Q$ , så er kryssforholdet

$$[AB, PQ] = \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$$



Teorem 10.7.19

Dersom  $O \neq A, B, P$  eller  $Q$ , så  
bevarer  $I_{O,r}$  kryssforholdet:

$$[AB, PQ] = [A'B', P'Q']$$

Bevis: her på egen hånd.

## Kap. 11 Modeller

- En modell i Euklidisk geometri (kartesiske planer)
- 1 hyperbolsk geo. :
  - Poincaré disken
  - —||— haluplanet
  - Beltrami-Klein modellen

Modellene viser at EPP og MPD er uafhængig af aksiomerne i neutral geometri.

En <sup>eksistensen af</sup> ↓ modell sier at systemet er konsistent (ingen logiske modsigelser kan udledes fra det aksiomatiske system et).

Dersom det eksisterer modeller for mængdelære, så eksisterer det modeller for Euklidisk geometri, og følgelig for hyperbolsk geo.

Gödel: Mængdelære kan ikke bruges til at vise at mængdelære er konsistent.

## 11.1 Den kartesiske modellen

### Tolkning

Punkt - et ordnet par av reelle tall  $(x, y)$

linje - la  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , og ikke både  $a=0, b=0$ , da er

$$l = \{ (x, y) \mid ax + by + c = 0 \}$$

Avstand -  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ ,

$$AB = \left( (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right)^{1/2}$$

Haluplan -  $H_1 = \{ (x, y) \mid ax + by + c > 0 \}$

$$H_2 = \{ (x, y) \mid ax + by + c < 0 \}$$

$$H_1 \cup H_2 \cup l = \mathbb{R} \times \mathbb{R} (= \mathbb{P})$$

Vinkelmål - vi bruker calculus

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

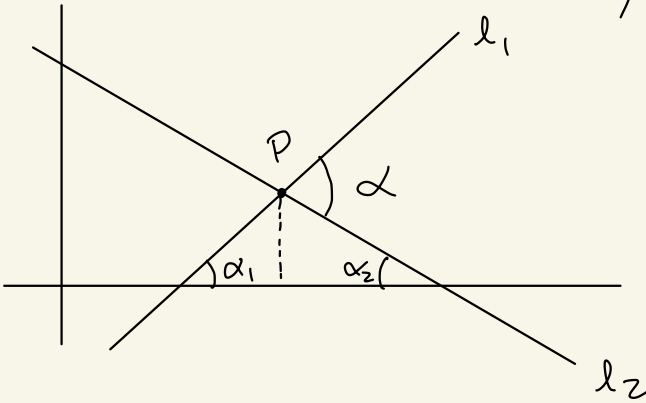
$$y = m_1 x + b_1$$

$$y = m_2 x + b_2$$

Hvis  $m_1 \cdot m_2 = -1$  er linjene normalt på hverandre.

Ellers, så har den minste vinkelen mellom linjene mål

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \left| \arctan \left( \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right) \right|$$



$$m_1 = \tan \alpha_1$$

$$m_2 = -\tan \alpha_2$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

Her holder EPP:

Har  $x = c$ , eller

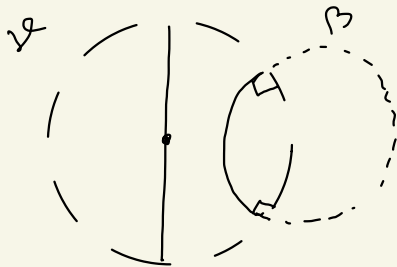
$$y = mx + b$$

- Parallele hvis  
vegge er vertikale

└ Parallele hvis linjene  
har samme stigningstall

## 11.2 Poincaré disken

Anta eksistensen av en Euklidisk modell. Vi bygger Poincaré disken "inni" den Euklidiske modellen.



Fiks sirkel  $\gamma$  i EG.

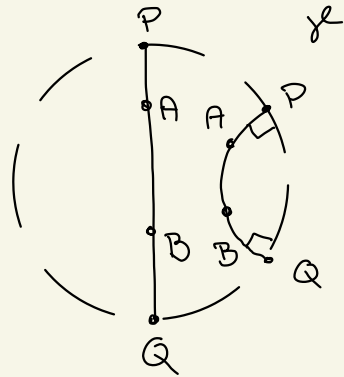
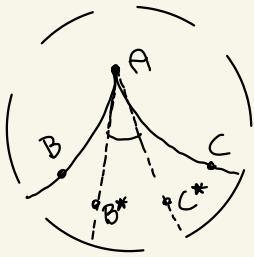
Punkt - et euklidisk punkt inni  $\gamma$ .

linje - åpen diameter eller sirkelbuen til en sirkel

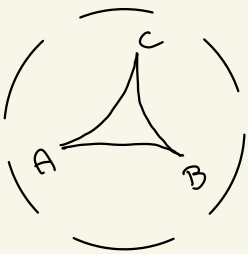
$\beta$  som er normal til  $\gamma$ .

Haloplan: snitt av det Euklidiske haloplanet i tilfelle linjen er en diameter, eller snittet av det indre/ytre av  $\beta$  med det indre av  $\gamma$  med insiden av  $\gamma$ .

Vinkelmål: Som for sirkler i delkap 10.7 med tangentstråler.

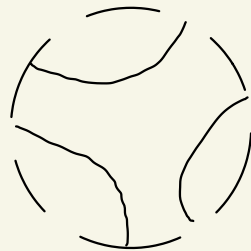
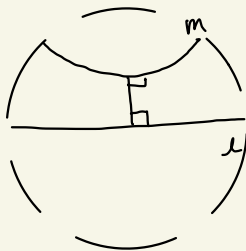
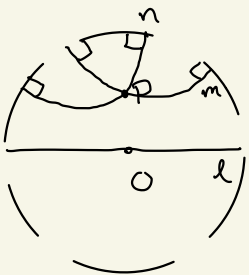


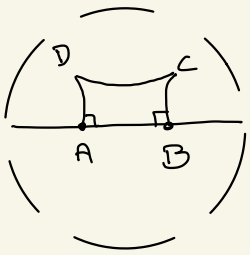
Avstand:



$$d(A, B) = |\ln([AB, PQ])|$$

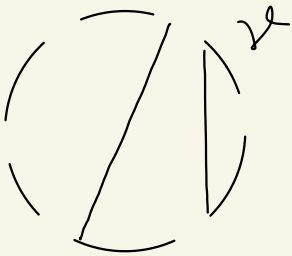
$$[AB, PQ] = \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$$





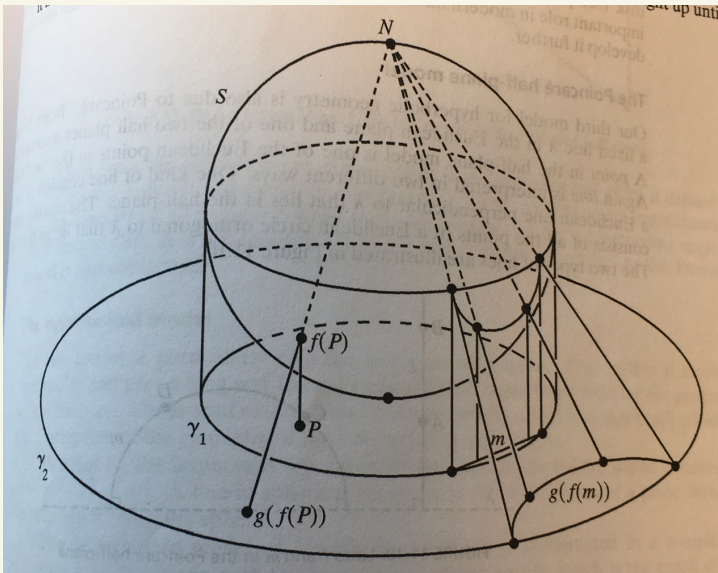
11.3

## Beltrami-Klein



linje er nå delen av en Euklidsk linje som er inni  $\mathcal{K}$ .

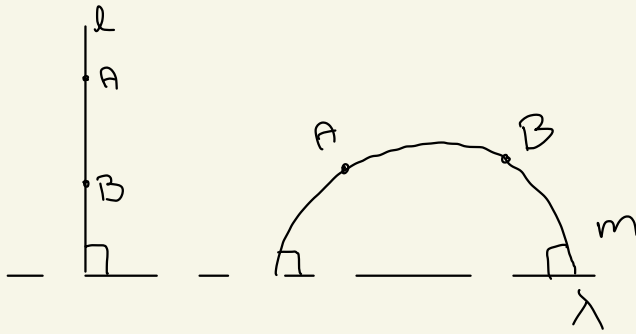
Avstand tolkes indirekte ved å mappe til Poincaré-disken.



Mapping fra  $\mathcal{K}_1$  (Beltrami-Klein disken) til  $\mathcal{K}_2$  (Poincaré-disken)

Figur fra Venema 2011 s. 297

# Poincaré halv-plaan



Punkt som i den  
Euklidske modellen  
hijer som på  
skisse

Avstand og  
vinkelmaal ved  
a mappe til  
Poincaré-disken.

(se figur i boka)