## 10.7 Euklidske inversjoner i en sirkel

Def. 10.7.1

La $C = C(O, r)$ være en sirkel.

Inversjonen i $C$ er en transformasjon

$I_{O,r}$ s.a.

$P' = I_{O,r}(P)$ er punktet på $\overrightarrow{OP}$ s.a.

$OP \cdot OP' = r^2$ (for $O \neq P$).

Utvider vi til det "inversive planet"

$\mathbb{P} \cup \{\infty\}$ s.a.

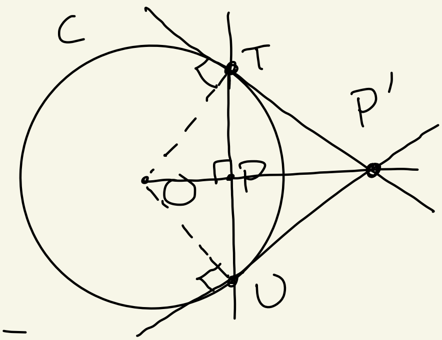
$I_{O,r}(O) = \infty$ og $I_{O,r}(\infty) = O$,

er $I_{O,r}$ transformasjon fra
$\mathbb{P} \cup \{\infty\} \to \mathbb{P} \cup \{\infty\}$.

(Merk at $C$ mapper til seg selv.)

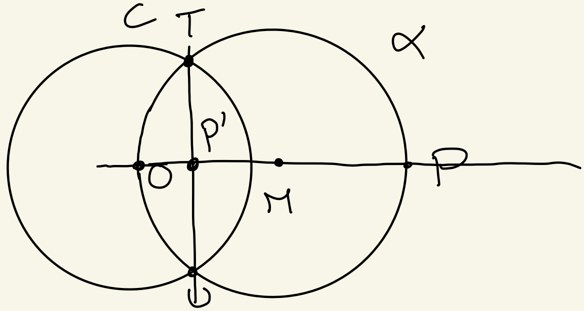
Konstruksjon av $P' = I_{O,r}(P)$:

$P$ inne i $C$:




$P'$ – Punktet der tangentene skjærer $\overleftrightarrow{OP}$

$P$ på utsiden av $C$:




$M$ – midtpunktet på $\overline{OP}$
$\alpha$ – radius $MP$
$P'$ – punktet der $\overline{TU}$ skjærer $\overline{OP}$

Avstand er ikke bevart av $I_{O,r}$, altså er det ikke en isometri.

Teorem 10.7.3
La $P$ og $Q$ være punkter som ikke er kollineære med $O$.

Da vil $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$

Bevis.

Bruker SVS formlikhetskriterium (5.3.3), altså $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{EF}$ og

$\angle BAC \cong \angle DEF$, så er

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Def. av inversjon gir $OP \cdot OP' = r^2$

$= OQ \cdot OQ'$,

så $\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}$, og

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ'}$, så

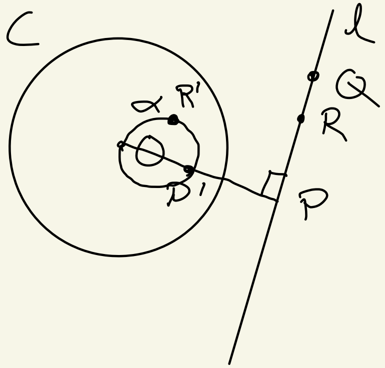
$\angle POQ \cong \angle P'OQ'$.

$\square$

Teorem 10.7.4

Hvis $l$ er en linje og $O \notin l$, da er $I_{O,r}(l \cup \{\infty\})$ en sirkel s.a. $O$ ligger på sirkelen.

Skisse:




$P' = I_{O,r}(P)$

$\alpha$ – sirkel med diameter $\overline{OP'}$.

$\alpha = I_{O,r}(l \cup \{\infty\})$

1. Velg $Q \in l$ og vis at $Q' \in \alpha$
2. $I_{O,r}(\infty) = O$
3. $R' \in \alpha$, $R' = O$, vet at $\angle OR'P'$ er en rettvinkel, så $\angle OPR$ er en rettvinkel (10.7.3), så $R \in l$.

Så da er det et punkt $R \in l$ s.a. $R' = I_{O,r}(R)$.

Def: $OR \cdot OR' = r^2$.

Kor. 10.7.5

$I_{O,r}(\alpha - \{O\})$ er en linje (gitt $O \in \alpha$).

Teorem 10.7.6

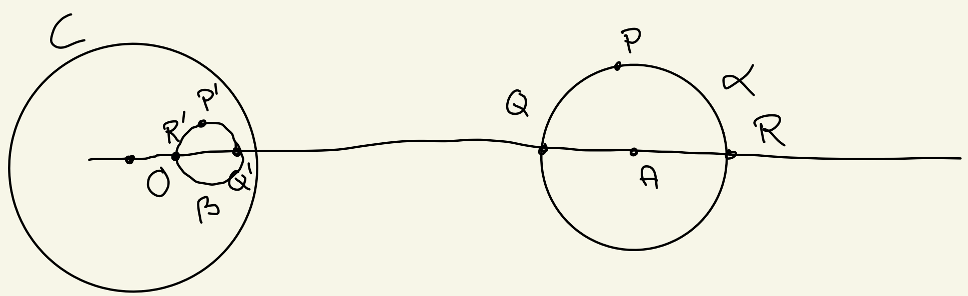
$l$ er en linje s.a. $O \in l$, er

$I_{O,r}(\ell \cup \{\infty\}) = \ell \cup \{\infty\}$.

Teorem 10.7.7

Hvis $\alpha$ er en sirkel s.a. $O \notin \alpha$, så er $I_{O,r}(\alpha)$ en sirkel.

<u>Skisse:</u>




1. $A = O$

$\Rightarrow I_{O,r}(\alpha)$
$= C(O, r^2/s)$

2. $A \neq O$. $\overline{Q'R'}$ diameter i $\beta = I_{O,r}(\alpha)$.

↑ dette er sirkelen.

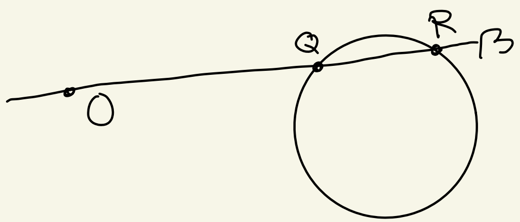
2. Bevis ved å vis at $P \in \alpha$ hviss $P' \in \beta$: $\angle R'P'Q'$ måler $90°$ hviss $\angle QPR$ måler $90°$.

($\overline{R'Q'}$ er en diameter i $\beta$, $\overline{RQ}$ en diameter i $\alpha$ fra 8.3.2 og 8.34).

Oppsummert:

Er $\gamma$ enten en sirkel eller en linje, så er $I_{O,r}(\gamma)$ enten en sirkel eller en linje.

Potensen til et punkt O gitt $\beta$:




$OQ \cdot OR$

Potensen er veldefinert. (konstant)

Def. 10.7.8

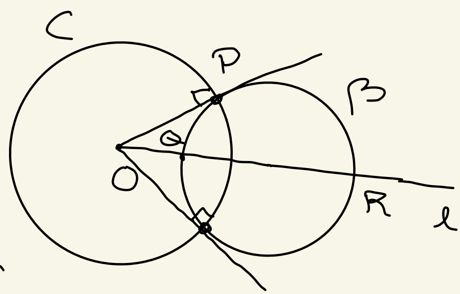
Sirkler som er normalt på hverandre skjærer hverandre s.a. tangentene i skjæringspunktene er normalt på hverandre.

Teorem 10.7.9

Hvis $\beta$ er normal til $C(O,r)$, vil $I_{O,r}(\beta) = \beta$.

"Bevis":

Potensen til O gitt $\beta$ er $OQ \cdot OR$. Den er konstant, så



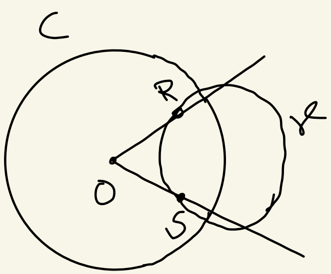
$OQ \cdot OR = (OP)^2 = r^2.$

Merk: $I_{O,r}$ mapper "innsiden" til "utsiden" og omvendt.

$C$ er normal til $\beta$ hviss $I_{O,r}(\beta) = \beta$.

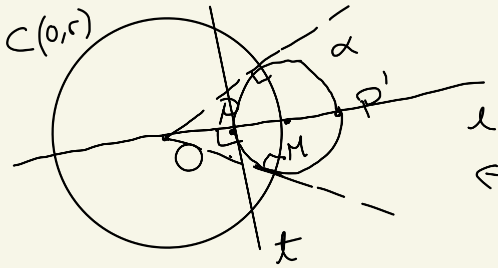
10.7.12:

Dersom $R$ og $S$ ikke er på samme diameter i $C(O,r)$, kan man konstruere en unik sirkel $\gamma$ som er normal til $C$ gjennom $S$ og $R$.




10.7.13:

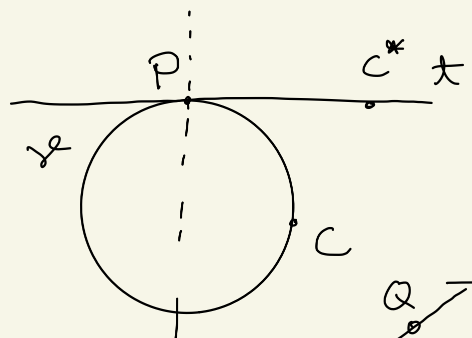
Hvis $P$ er punkt på innsiden av $C$, $P \neq O$, så vil det for enhver $t$ s.a. $P \in t$, $O \notin t$ eksistere en unik sirkel $\alpha$ s.a. $t$ er tangent til $\alpha$ og $\alpha$ er normal til $C$



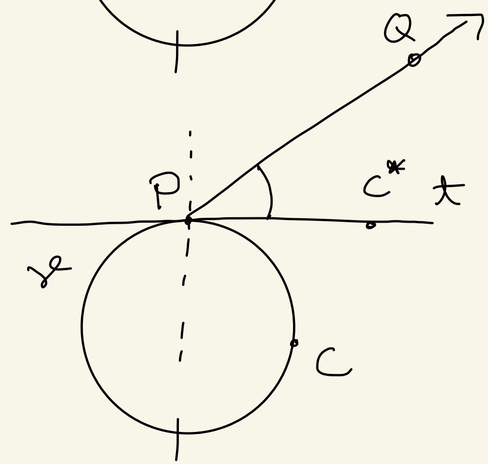

Det er $\alpha$ med diameter $\overline{PP'}$ og sentrum $M$ der $M$ er midtpunktet på $\overline{PP'}$ når $O \in l$, se boka for $O \notin l$.

$l$ er normalen til $t$ i punktet $P$.

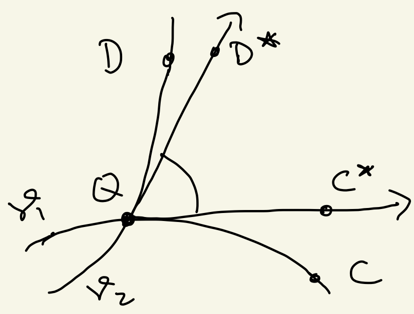
# Vinkelbevaring:




$\gamma(P,C)$ er sirkelbuen fra $P$ til $C$.
$\overrightarrow{PC^*}$ er tangent til $\gamma(P,C)$.




$\angle QPC^*$ er vinkelen mellom $\overrightarrow{PQ}$ og $\gamma(P,C)$

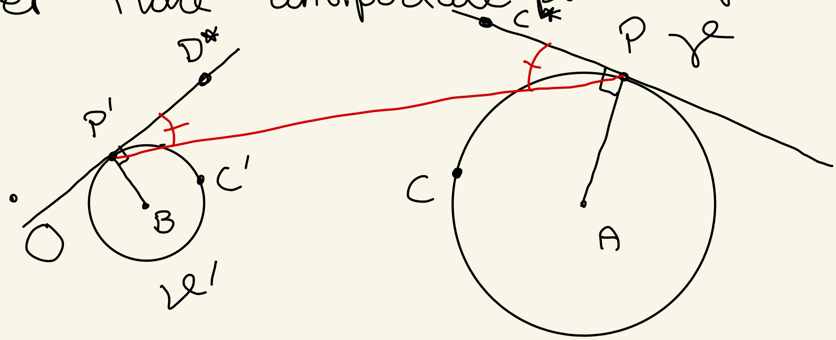



Vinkelen mellom to sirkler $\gamma_1$ og $\gamma_2$ som krysser i $Q$ er $\angle D^*QC^*$.

Teorem 10.7.15

$\gamma' = I_{O,r}(\gamma)$, $\gamma$ sirkel. $O \notin \gamma$.

C og P er ikke antipodale punkt på $\gamma$.




Da er

$$\angle C^* P P' \cong \angle D^* P' P.$$

<u>Skisse:</u>

Bruk Teorem 10.7.3 og likebeint-trekant teoremet.

Teorem 10.7.17

Huis $\gamma_1$ og $\gamma_2$ er (hver for seg) enten en sirkel eller en linje, $P \in \gamma_1$, $P \in \gamma_2$, da er vinkelen mellom $\gamma_1(P, C_1)$ og $\gamma_2(P, C_2)$ kongruent med vinkelen mellom $\gamma_1'(P', C_1')$ og $\gamma_2'(P', C_2')$. ← inversjon av $\gamma_2$

($\gamma(P, C)$ på en linje er et

segment.)

Skisse:

Følger av 10.7.15 for sirkler:

$180^\circ - x - x$

$= r$