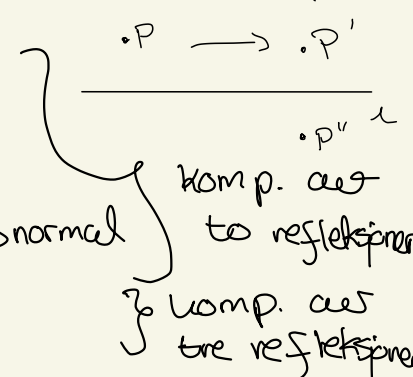


Enhver isometri i planet kan uttrykkes som komposisjonen av to eller tre refleksjoner.



I går:

- Punktspesiling } når linjene krysser
- Rotasjon } når linjene krysser
- Translasjon } når linjene er parallelle
- Gliderefleksjon } når linjene er parallelle



↑ I dag:

Komp. av tre refleksjoner er alltid en gliderefleksjon.

I tillegg skal vi klassifisere Euklidiske bevegelser (som er de isometriene vi så på i går)

10.3 Euklidiske bevegelser

Def: Det er en isometri i det Euklidiske planet.

Teorem 10.3.2

En isometri er en gliderefleksjon hvis isometrien kan uttrykkes som en

komposisjon av tre refleksjoner.

Beviset er delt opp i flere små lemma.

lemma 10.3.3

Hvis l, m og n er tre linjer som krysser i et punkt P , så eksisterer det en linje s s.a. $P \in s$ og

$$P_l \circ P_m \circ P_n = P_s.$$

Bevis. Rotasjonsteoremet gir s s.a.

$$P_l \circ P_m = P_s \circ P_n, \quad \text{så}$$

$$P_l \circ P_m \circ P_n = P_s \circ \underbrace{P_n \circ P_n}_{\text{identiteten}} = P_s. \quad \square$$

lemma 10.3.4

Hvis l, m og n er tre linjer med felle-normal k , så eksisterer en linje

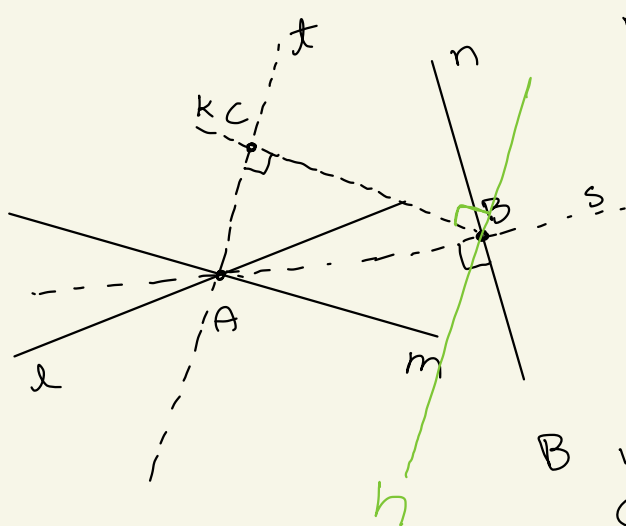
$$s \text{ slik at } s \perp k \text{ og } P_l \circ P_m \circ P_n = P_s.$$

Bevis. Translasjonsteoremet gir at det eksisterer $s \perp k$ s.a. $P_l \circ P_m = P_s \circ P_n$, så $P_l \circ P_m \circ P_n = P_s$.

hemma 10.3.5

Hvis l, m og n er tre linjer s.a. l og m krysser, da er $P_l \circ P_m \circ P_n$ en glide-refleksjon.

Bevis. La $A \in l \cap m$, og definer s til å være linjen s.a. $s \perp n$ og $A \in s$. Av



rotasjonsteoremet så eksisterer en linje t s.a. $P_l \circ P_m = P_t \circ P_s$, så

$$P_l \circ P_m \circ P_n = P_t \circ P_s \circ P_n.$$

La $B \in s \cap n$. Trekke en normal k fra B ned på t . La $C \in t \cap k$. La h

være linjen B s.a. $h \perp k$. (*)

Av punktspilings-teoremet $P_s \circ P_n = P_n \circ P_k$,

og $P_t \circ P_h$ er en translasjon/glidning, så $P_t \circ P_n \circ P_k$ er en glide-refleksjon.

Fra (*) ser vi at

$$\underline{P_t \circ P_s \circ P_n} = P_t \circ P_n \circ P_k, \text{ så}$$

$P_l \circ P_m \circ P_n$ er en glide-refleksjon
i dette tilfellet. □

Tilfellet m og n krysser kan vises
på lignende vis (hemma 10.3.6).

Bevis av Teorem 10.3.2

Av definisjonen av glide-refleksjon, så
er det klart at en glide-refleksjon er
komp. av tre refleksjoner.

Vi viser motsatt retning:

La l , m og n være tre linjer (hypo.)

Vi må vise at $P_l \circ P_m \circ P_n$ alltid
er en glide-refleksjon. (kan være ren refleksjon
hvis translasjonene er
identiteten)

Enten $l \parallel m$ eller $l \not\parallel m$. Hvis $l \parallel m$,
følger resultatet av hemma 10.3.5.

Vi viser at det andre tilfellet $l \not\parallel m$
kan reduseres til hemma 10.3.6.

Anta $l \not\parallel m$. Velg $C \in n$. Hvis $C \in l$,
velg $s = l$; hvis $C \in m$, velg $s = m$.

Ellers, velg s til å være den unike linjen gjennom C som er parallell med både l og m (EPP, transitivitet).

Av lemma 10.3.4 så eksisterer en linje t s.a. $\rho_t = \rho_l \circ \rho_m \circ \rho_s$, så

$$\begin{aligned}\underline{\rho_l \circ \rho_m \circ \rho_n} &= \rho_l \circ \rho_m \circ \rho_s \circ \rho_s \circ \rho_n \\ &= \underline{\rho_t \circ \rho_s \circ \rho_n}.\end{aligned}$$

Siden $C \in s \cap n$, så følger resultatet av lemma 10.3.6.

□

Teorem 10.3.7 (Klassifisering av Euklidiske bevegelser)

Enhver Euklidisk bevegelse er enten identiteten, en refleksjon, en punktspiling, rotasjon eller en glide refleksjon.

Bevis. La T være en Euklidisk bevegelse. Da kan T skrives som komposisjonen av 0, 1, 2 eller 3 refleksjoner (Kor. 10.1.11)

0: identiteten

1: refleksjon

2: identiteten, punktspeiling, rotasjon, translasjon.

↑ disse deler alle måter to linjer kan relateres til hverandre på i Euklidisk geometri.

3: Gliderefleksjon (Teorem 10.3.2)

□

10.5 "Annen versjon" av nøytral geometri

Vi bytter ut SVS postulatet med

Aksiom 10.5.1 Refleksjonspostulatet

For enhver linje l så eksisterer det en transformasjon $P_l: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, kalt refleksjonen om l , som oppfyller:

I: Hvis $P \in l$, så $P_l(P) = P$.

II. Hvis P ligger et haloplan bestemt av l , så ligger $P_l(P)$ i det motsatte.

III. P_l bevarer kollinearitet.

IV. P_l bevarer avstand.

V. P_l bevarer vinkelmaal.

Definisjoner:

- En rigid bevegelse er en transformasjon av planet som bevarer kollinearitet, avstand og vinkelmaal.
- En figur er en delmengde av planet.
- To figurer X og Y er kongruente hvis det eksisterer en rigid bevegelse $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ s.a. $f(X) = Y$.

Vi viser SVS som et teorem.

Det betyr at enten SVS eller Aksiom 10.5.1 kan brukes som aksiom.

(Merk at vi nå bare kan bruke teoremer vi beviste før vi innførte SVS som et aksiom.)

Teorem 10.5.5

Refleksjonspostularet impliserer SVS.

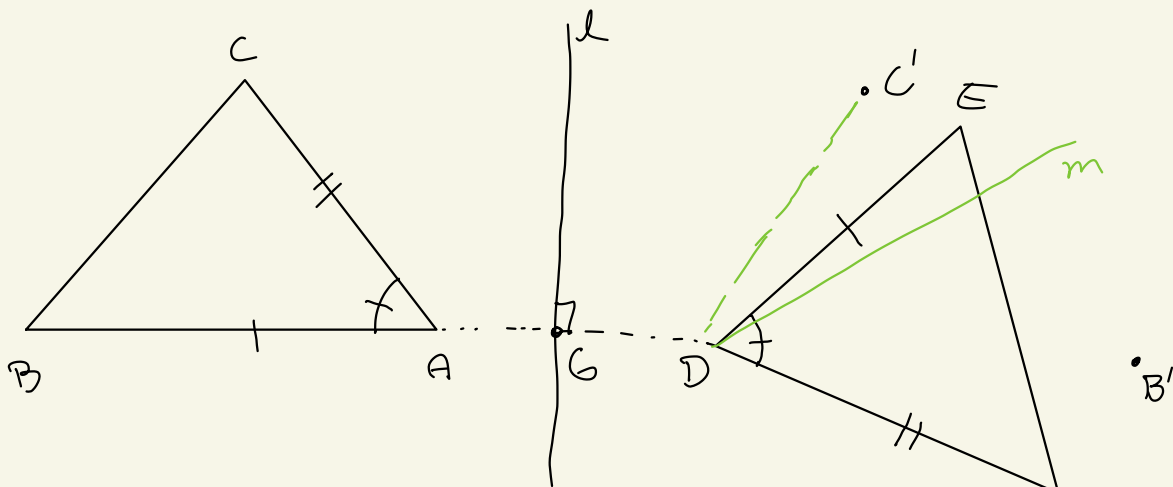
Beweis. La $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ være to trekanteder s.a. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle BAC \cong \angle EDF$ og $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ (hypotese).

Vi må vise at det eksisterer en

rigid bevægelse T s.a.

$T(\triangle ABC) = \triangle DEF$. Vi konstruerer T som en komposition af maks. tre refleksjoner. Det er nok med en T s.a. $T(A) = D$, $T(B) = E$ og $T(C) = F$. (Pga. refleksionspost)

la l være halveringsnormalen til \overline{AD} og P_l være tilhørende refleksjon. (postulat)
la $G \in l \cap \overline{AD}$. Siden l bevarer kollinearitet, må billedet af \overrightarrow{GA} være en stråle fra G .



Siden P_l bytter halvplan og bevarer vinkler, må strålen være \overrightarrow{GD} . Siden P_l bevarer afstand, $P_l(A) = D$. Definer $B' = P_l(B)$ og $C' = P_l(C)$.

Hvis C', D og F er ikke-kollinære, la m være vinkelhalveringsstrålen til $\angle C'DF$ og la ρ_m være tilhørende refleksjon.

Da vil $\rho_m(D) = D$, og $\rho_m(\overrightarrow{DC'}) = \overrightarrow{DF}$ (som i forrige tilfelle), så $\rho_m(C') = F$. \uparrow ρ_m bevarer vinkel mål.

Hvis $\overrightarrow{DC'}$ og \overrightarrow{DF} er motsatte stråler, la m være linjen som er normal på $\overleftrightarrow{FC'}$ ved D . Igjen

så vil $\rho_m(D) = D$ og $\rho_m(C') = F$.

Hvis $\overrightarrow{DC'}$ og \overrightarrow{DF} er ekvivalente, må $C' = F$ (bevarer avstand).

la $g = \rho_m$ i de to første tilfellene, og $g = \iota$ i det siste.

Merk $g(B') = E$ eller $g(B')$ er refleksjonen av E om \overleftrightarrow{DF} .

Definer $n = \overleftrightarrow{DF}$ og $f = \iota$ hvis $g(B') = E$

og $f = P_n$ i det andre tilfellet.

Da er

$T = f \circ g \circ P_e$ den rigide bevegelsen vi leter etter.

□

To andre teoremer med det "nye" aksiomet:

- likebeint- trekant- teoremet
- vinkelsumsteoremet