Husk at Lemma 10.1.10 gir at en isometri f er lik ι (identiteten) hvis $f(A_i) = A_i$, $i = 1,2,3$, for tre ikke-kollineære punkt.

Bevis av unikhet i Teorem 10.1.8.
Anta A, B og C er tre ikke-kollineære punkt og at f og g er to isometrier slik at $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ og $f(C) = g(C)$.
Definer $h = f^{-1} \circ g$. Da er h en isometri (10.1.6), og $h = \iota$ fra Lemma 10.1.10.
Derfor $\underbrace{f \circ h}_{= g} = f \circ \iota = f$, så $f = g$

$\square$

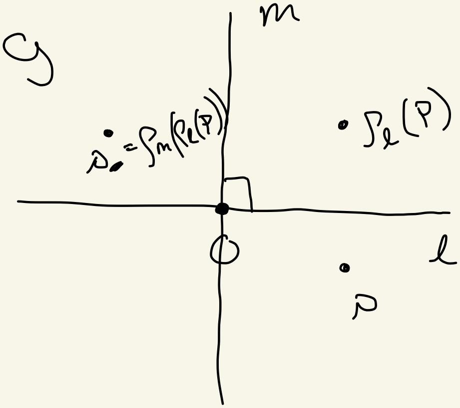
10.2 Rotasjoner, translasjoner og glidereflektsjoner

Husk: vi er i nøytralgeometri

Først ser vi på komposisjon av to

refleksjoner:

Eks. 10.2.1 Punktspeiling



Komposisjonen av to refleksjoner om to linjer som står normalt på hverandre.

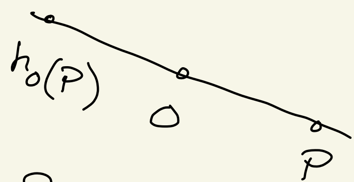
La l og m være de to linjene, og la O være krysningspunktet. Da er punktspeilingen om punktet O $h_O = \rho_m \circ \rho_l$.

Teorem 10.2.2 Punktspeilingsteoremet

La l og m være to linjer som krysser i O og står normalt på hverandre. La $h_O = \rho_m \circ \rho_l$ være punktspeilingen om O.

1. Hvis $P \neq O$ er et punkt, så er O midtpunktet på segmentet $\overline{P h_O(P)}$.

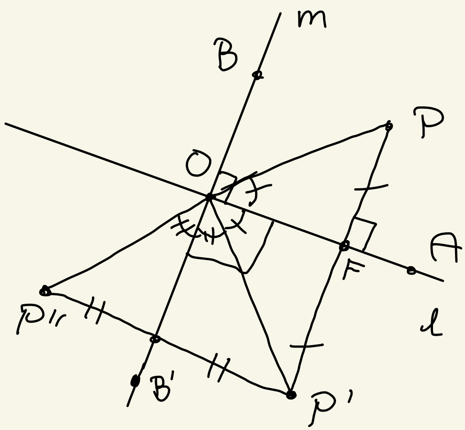
2. Hvis n og s er to linjer som krysser i O og står normalt på hverandre, så er $h_O = \rho_n \circ \rho_s = \rho_s \circ \rho_n$.



Bevis.

1. $P \neq O$. Definer $P' = \rho_\ell(P)$, $P'' = \rho_m(P')$

$= h_O(P)$.



Dersom P ligger på ℓ eller m, så følger det av def. at O er midtpunktet på $\overline{PP''}$ (h_O er bare en refleksjon).

Anta $P \notin \ell$, $P \notin m$. Da må P være i det indre av en av de fire $90°$-vinklene. Velg $B \in m$ og $A \in \ell$ så P er i det indre av $\angle AOB$. Velg B' på den motsatte strålen til $\overrightarrow{OB}$. La F være foten fra normalen fra P ned på ℓ. Av SVS, er $\triangle POF \cong \triangle P'OF$, så $\angle POA \cong P'OA$ og $OP = OP'$. Og, $\angle P'OB' \cong \angle P''OB'$ og $OP = OP''$ (SVS). Så $OP = OP''$.

siden $\mu(\angle AOP') + \mu(\angle P'OB') = 90°$,
er
$\mu(\angle POP') + \mu(\angle P'OP'') = 180°$, så
er $\overrightarrow{OP}$ og $\overrightarrow{OP''}$ motsatte stråler
(lineært-par-teoremet).

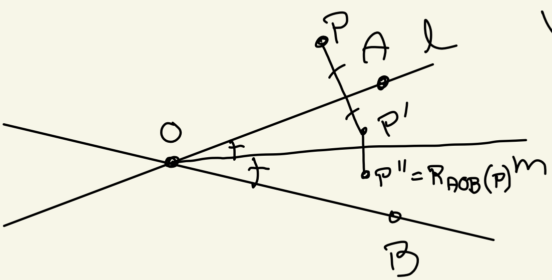
2. Dette følger fordi ingen andre egenskaper ved ℓ og m ble brukt enn at de krysser i O.

□

Eks. 10.2.4

Komposisjon av to refleksjoner rundt to linjer som krysser. Dersom linjene er normalt på hverandre, er det en punktspeiling. linjen

Start med en vinkel $\angle AOB$.



Velg $\ell = \overleftrightarrow{AO}$ og m til å være vinkelhalveringsstrålen til $\angle AOB$. Da er $\rho_m \circ \rho_\ell$ rotasjonen med senter O og vinkel $\angle AOB$.

Notasjon: R_{AOB}

Merk at R_{AOB} og R_{BOA} er ulike transformasjoner. Faktisk så er $R_{BOA} = R_{AOB}^{-1}$.

Teorem 10.2.5 (Rotasjonsteoremet)
La R_{AOB} være rotasjonen med senter O og vinkel $\angle AOB$.

1. Hvis $P \neq O$ er et punkt og $P'' = R_{AOB}(P)$, da er
$$\mu(\angle POP'') = \mu(\angle AOB).$$

2. Hvis n er en linje s.a. $O \in n$, da eksisterer s og t s.a.
$$R_{AOB} = \rho_s \circ \rho_n = \rho_n \circ \rho_t.$$

Bevis.

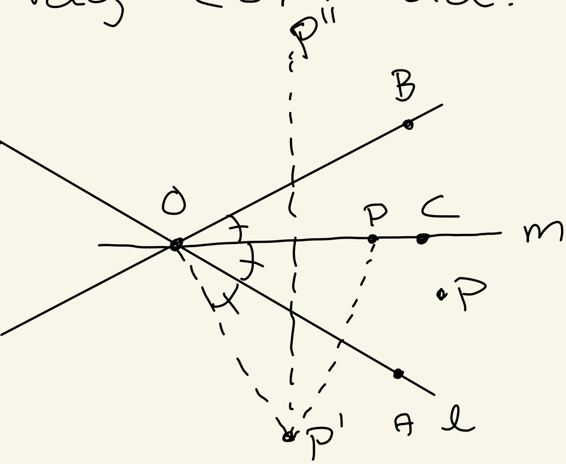
1. La $R_{AOB} = \rho_m \circ \rho_\ell$ være rotasjonen med senter O og vinkel $\angle AOB$, hvor $\ell = \overleftrightarrow{AO}$ og m er linjen som

inneholder vinkelhalveringsstrålen til $\angle AOB$.

Hvis $\mu(\angle AOB) = 0°$, vil $l = m$ og $R_{AOB} = \iota$, og 1. og 2. følger lett.

Vi antar at $l \neq m$ i det følgende.

Velg $C \in m$ s.a. C er i det indre av $\angle AOB$. La $P \neq O$. Fiks slik at hvis $P \in m$ eller $P \in l$, så $P \in \angle AOB$, eller hvis P er et annet punkt, slik at A og P er på samme side av m.



La $P' = \rho_l(P)$, $P'' = \rho_m(P') = R_{AOB}(P)$.

La oss vise 1. først.

I: $P \in l$. Da er $P' = P$ og ρ_m reflekterer P rundt m, så $\mu(\angle POP'') = \mu(\angle AOB)$.

II: $P \in m$. Da er $\mu(\angle POP')$
$= 2\mu(\angle AOC)$

$$= \mu(\angle AOB),$$

og $\mu(\angle P'OP'') = 2\mu(\angle POP')$,

så $\mu(\angle POP'') = \mu(\angle P'OP'') -$

$$\mu(\angle POP')$$

$$= \mu(\angle AOB).$$

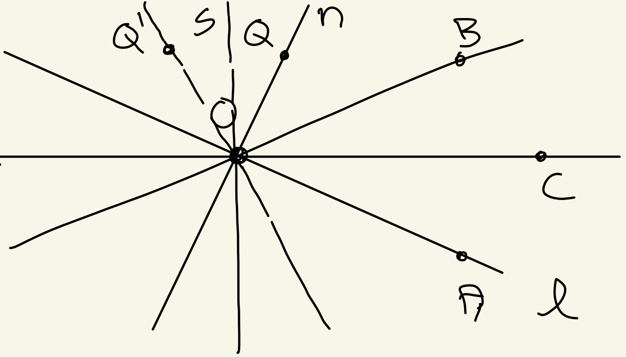
III: P er i det indre av $\angle AOC$.

IV: P ikke er i det indre av $\angle AOC$, men P' er.

V: Hverken P eller P' er i det indre av $\angle AOC$.

III – V vises på lignende vis som I–II.

2. La n være en linje s.a. O∈n. Velg $Q \neq O$. La $Q' = R_{AOB}(Q)$ og la s inneholde vinkelhalveringsstrålen til $\angle Q'OQ$



Vi skal vise at $R_{AOB} = \rho_s \circ \rho_n$. Av korollar 10.1.9 så holder det å vise at det stemmer for tre ikke-kollineære punkt:

- $R_{AOB}(O) = \rho_s \circ \rho_n(O)$
- $R_{AOB}(Q) = \rho_s \circ \rho_n(Q)$

Det siste punktet er midtpunktet på $\overline{QQ'}$, la oss kalle det M.

La $M' = \rho_s \circ \rho_n(M)$, $M'' = R_{AOB}(M)$.

$R_{AOB}(\triangle OMQ) = \triangle OM''Q'$, så

$\triangle OMQ \cong \triangle OM''Q'$, så enten er

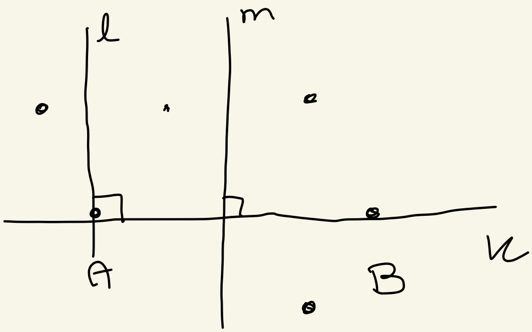
$M'' = M$ eller $M'' = M'$.

Men O er det eneste fikspunktet til R_{AOB}, så $M'' \neq M$ og dermed $M'' = M'$.

På lignende vis kan man finne t s.a. $\rho_n \circ \rho_t = R_{AOB}$.

$\square$

Def. 10.2.7 Translasjon
To refleksjoner rundt linjer med en fellesnormal. Gitt to ulike punkt



A og B, velg $k = \overleftrightarrow{AB}$, og l normalen til k ved A og m halveringsnormalen til $\overline{AB}$.
Da kalles

$T_{AB} = \rho_m \circ \rho_l$ for translasjonen fra A til B.

Teorem 10.2.8 (Translasjonsteoremet)
La T_{AB} være en translasjon, $A \neq B$ og la $k = \overleftrightarrow{AB}$.

1. Hvis $P \in k$, er $P' = T_{AB}(P)$ punktet på k s.a. $PP' = AB$ og

$\overrightarrow{PP'}$ er ekvivalent med $\overrightarrow{AB}$.
Hvis $P \notin k$, er P' på samme side av k som P.

2. Hvis n er en linje s.a. $n \parallel k$, så eksisterer s og t s.a.
$T_{AB} = \rho_s \circ \rho_n = \rho_n \circ \rho_t$.

Har ikke nødv. $PP' = AB$ i nøytral geometri. Tenk f.eks. Saccheri firkant i hyperbolsk geometri.

Eks. 10.2.10 Glidrefleksjon
Komposisjonen $\rho_k \circ \rho_m \circ \rho_l$ hvor k, l, m er tre linjer s.a. $m \perp k$, $l \perp k$.
Notasjon: G_{AB}. Glir langs k, så refleksjon.