

Kapittel 10: Transformasjoner

Funksjoner som bevarer geometriske strukturer.

"Forenkler" kongruens: Et objekt er kongruent med et annet dersom det ene kan transformeres til det andre.

Def. 10.1.1 (Transformasjon og isometri)

En transformasjon $T: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ er en funksjon som er både 1-til-1 og på.

En isometri er en transformasjon som bevarer avstand. Dvs. $T(A)T(B) = AB$.

Notasjon: $P' = T(P)$.

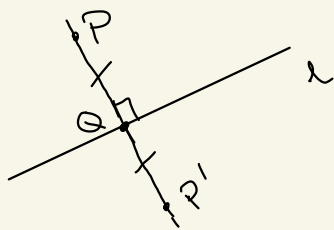
Eksempler:

Identitetsfunksjonen $\iota: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ er en isometri
 $\iota(P) = P$

Refleksjon om en linje
ha l være en linje. Definer
 $\rho_l: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ som følger.

$P' = P_e(P) = P$ for alle $P \in l$.

For eksterne punkt P , dropp en normal fra P ned på l .



Kall foten for Q .

La $P' = P_e(P)$ være

punktet på \overrightarrow{PQ} s.a.

Q er midtpunktet på $\overline{PP'}$.

P_e er en isometri (øving).

Def. 10.1.4

Et punkt P er et fikspunkt til en transformasjon dersom

$$T(P) = P.$$

$P \in l$ er fikspunkt for P_e . Alle punkt er fikspunkt for l .

Eksempel: utvidelse/dilatasjon med sentrum O og konstant k .

La O være et punkt og $k \in \mathbb{R}_+$

Utvidelsen $D_{O,k}$ defineres som følger.

$D_{0,k}(0) = 0$. For $P \neq 0$

$D_{0,k}(P) = P'$ s.a. $P' \in \overrightarrow{OP}$ og

$$OP' = k \cdot OP$$

Ikke en isometri.

Teorem 16.1.6

Komposisjonen av to isometrier er en isometri. Den inverse av en isometri er også en isometri.

Bevis. La T_1 og T_2 være to isometrier. Siden de begge er 1-til-1 og på, så er $T_2 \circ T_1$ en transformasjon. (Husk: $T_2 \circ T_1(P) = T_2(T_1(P))$)

La P og Q være to punkter. Siden T_2 og T_1 er isometrier,

$$\begin{aligned} T_2(T_1(P)) T_2(T_1(Q)) &= T_1(P) T_1(Q) \\ &= PQ, \end{aligned}$$

$$\text{så } T_2 \circ T_1(P) T_2 \circ T_1(Q) = PQ.$$

ha T være en isometri, og

P og Q to punkt.

$$PQ = T(T^{-1}(P))T(T^{-1}(Q)) = T^{-1}(P)T^{-1}(Q),$$

så T^{-1} er en isometri.

En isometri bevarer andre geometriske enn avstand:

Teorem 10.1.7

ha $T: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ være en isometri.

1. Dersom P, Q, R er tre kollineære punkt, så er $T(P), T(Q), T(R)$ kollineære.

2. Dersom $P * Q * R$, så $T(P) * T(Q) * T(R)$

3. Hvis A, B er to punkter og $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, så $T(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$,
 $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$.

4. Hvis l er en linje, så er $T(l)$ en linje.

5. T bevarer mellomligheten av stråler.

6. T bevarer vinkler: Hvis $\angle BAC$ er en vinkel, så er $T(\angle BAC)$ en vinkel

og $\angle BAC \cong T(\angle BAC)$.

7. Hvis $\triangle ABC$ er en trekant, så er $T(\triangle ABC)$ en trekant og $\triangle ABC \cong T(\triangle ABC)$.

8. T beværet sirkler.

Bevis av egenskap 1. La P, Q, R være tre kollineære punkter, og la P', Q', R' være avbildningene av punktene gjitt isometri T .

Et av punktene P, Q, R må ligge mellom de andre (kor 3.2.19), la oss si $P * Q * R$. Siden $PR = PQ + QR$ (def. av mellomliggenhet), så følger det at $P'R' = P'Q' + Q'R'$ (def. av isometri).

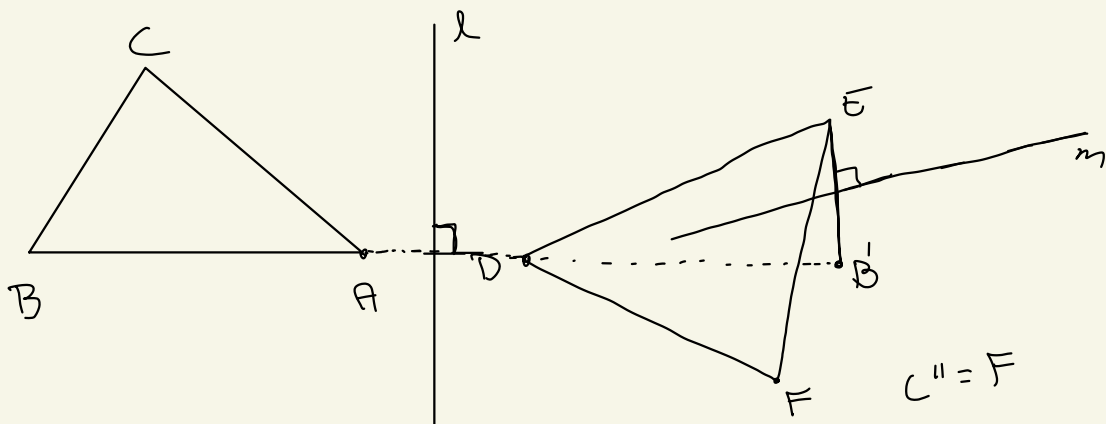
Anta at P', Q' og R' ikke er kollineære (RAA). Da gir trekant-ulikheten $P'R' < P'Q' + Q'R'$, men dette motsier det forrige utsagnet.

Så P', Q' og R' må være kollineære. \square

Teorem 10.1.8 (Eksistens og unikhed av isometrier)

Dersom $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er to trekanter s.a. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, så eksisterer det en unik isometri T s.a. $T(A) = D$, $T(B) = E$ og $T(C) = F$. T er en komposisjon av to eller tre refleksjoner.

Bevis av eksistens. Anta hypotesen. Vi må vise at det eksisterer en isometri s.a. $T(\triangle ABC) = \triangle DEF$ og at T består en komp. av refleksjoner.



la l være halveringsnormalen til \overline{AD} , og la g være tilhørende refleksjon.

Av def. av ρ_l , har vi $\rho_l(A) = D$.

La $B' = \rho_l(B)$ og $C' = \rho_l(C)$. La m være halvveringsnormalen til $\overline{B'E}$ og ρ_m tilhørende refleksjon. Da er

$\rho_m(B') = E$ av def. av refleksjon.

Siden $DB' = DE$, ligger D på m

så $\rho_m(D) = D$. La $C'' = \rho_m(C')$. (4.3.7),

Enten er $C'' = F$ eller så er C'' refleksjonen av F over \overleftrightarrow{DE} .

(ρ_l, ρ_m bevarer avstand og vinkler, T 4.2.6). La $n = \overleftrightarrow{DE}$ og

$f = \iota$ hvis $C'' = F$, eller $f = \rho_n$

i det andre tilfellet.

Da vil $T = f \circ \rho_m \circ \rho_l$ være den isometrien vi leter etter.

□

Unikhetsdelen av teoremet sier at isometrier som er like ved tre ikke-kollineære punkt, er like overalt:

Korollar 10.1.9

Dersom f og g er to isometrier, og A, B og C er tre ikke-kollineære punkt s.a. $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ og $f(C) = g(C)$, så er $f(P) = g(P)$ for alle punkt P .

Spesialtilfelle:

Bevis av tilfellet $g = u$ (identiteten).

La A, B, C være tre ikke-kollineære punkt, og la f være en isometri

s.a. $f(A) = A$, $f(B) = B$ og $f(C) = C$.

La P være et tilfeldig punkt.

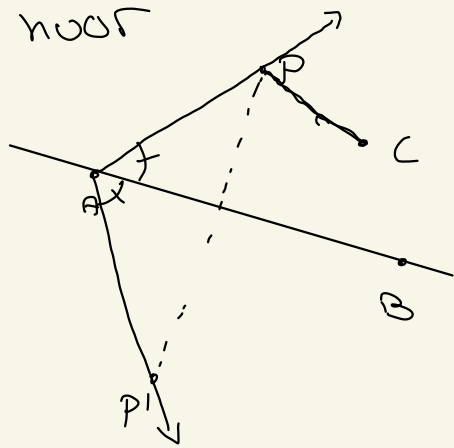
Vi må vise at $f(P) = P$. Vi deler beviset i to tilfeller: $P \in \overleftrightarrow{AB}$ eller ikke.

Anta $P \in \overleftrightarrow{AB}$. Siden $f(A) = A$ og $f(B) = B$ og f beværer kollinearitet,

så må $f(P) \in \overleftrightarrow{AB}$. Avstanden fra $f(P)$ til A må være PA , så enten er $f(P) = P$ eller så er $f(P)$ punktet på motsatt side like langt fra A .

Etersom mellomligheten er bevart for f , må $f(P) = P$. (Teorem 10.1.7).

Anta $P \notin \overleftrightarrow{AB}$. Siden f bevaret vinkler, så ligger $f(P)$ enten på \overrightarrow{AP} eller $\overrightarrow{AP'}$, hvor P' er refleksjonen av P rundt \overleftrightarrow{AB} .



Siden avstand er bevart, vil $f(P) = P$ eller $f(P) = P'$.

Dersom P og C er på samme side av \overleftrightarrow{AB} , så vil ikke \overline{PC} krysse \overleftrightarrow{AB} . Så da vil ikke bildet av \overline{PC} ved f krysse \overleftrightarrow{AB} heller (punktene i \overleftrightarrow{AB} er "fixed" og f er en-til-en).

Da kan ikke $f(P)$ være lik P' ,
så $f(P) = P$.

Hvis D og C er på motsatt side
av \overleftrightarrow{AB} , så må \overline{PC} krysse
 \overleftrightarrow{AB} , og avbildningen av \overline{PC} må
krysse \overleftrightarrow{AB} . Løjen betyr det at
 $f(P) \neq P'$, så $f(P) = P$.

□