8.3 Sirkler i Euklidsk geometri 20/3

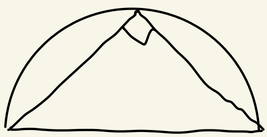
Det to første teoremene viser at en vinkel i en trekant måler 90° hviss siden ovenfor vinkelen er en diameter til omsirkelen.

Teorem 8.3:1

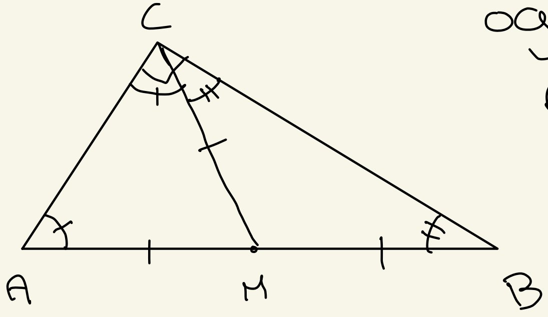
La ΔABC være en trekant, og la M være midtpunktet på $\overline{AB}$. Hvis $AM = MC$, så måler $\angle ACB$ $90°$.

Korollar 8.3.2

Hvis hjørnene i en trekant ΔABC ligger på en sirkel og $\overline{AB}$ er en diameter i sirkelen, så måler $\angle ACB$ $90°$.



Bevis av teorem 8.3.1. La $\alpha = \mu(\angle BAC)$ og $\beta = \mu(\angle ABC)$.



Av likebeint trekant teoremet har vi $\mu(\angle ACM) = \alpha$ og $\mu(\angle MCB) = \beta$.

Siden $A * M * B$, $\mu(\angle ACB) = \mu(\angle ACM) + \mu(\angle MCB)$.

Av EPP, $\sigma(\triangle ABC) = 180°$, så

$2\alpha + 2\beta = 180°$, og $\alpha + \beta = 90°$.

Det følger at $\mu(\angle ACB) = 90°$.

$\square$

Det motsatte holder også:

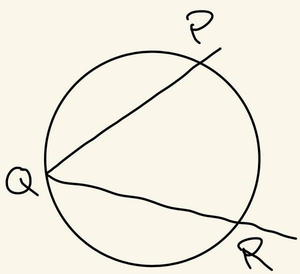
Teorem 8.3.3.
La $\triangle ABC$ være en trekant og la M være midtpunktet på $\overline{AB}$.
Hvis $\angle ACB$ måler $90°$, så vil $AM = MC$.

Bevis: Øving.

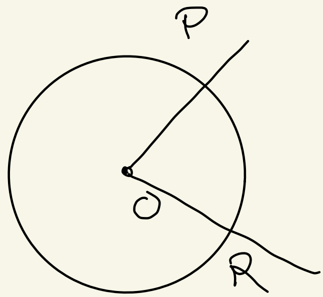
Korollar 8.3.4
Hvis $\angle ACB$ måler $90°$, vil $\overline{AB}$ være en diameter i omsirkelen til $\triangle ABC$.

Definisjon 8.3.7 (Periferivinkel, sentralvinkel)
La $\gamma = C(O, r)$ være en sirkel.
En periferivinkel er en vinkel på formen $\angle PQR$ der $P, Q, R \in \gamma$.

En sentralvinkel er en vinkel på formen $\angle POR$ der $P, R \in \gamma$. O er sentrum i sirkelen.

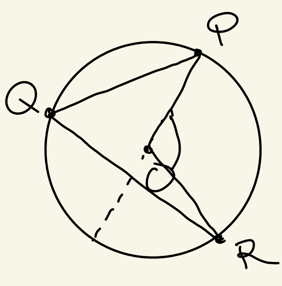


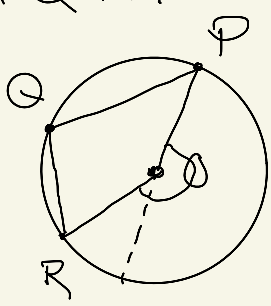
Periferivinkel



sentralvinkel.

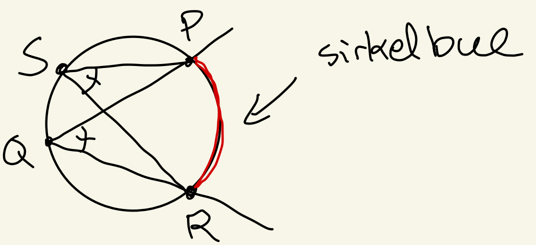
Def. 8.3.8 Anta at $\angle PQR$ er en periferivinkel til $C(O,r)$ s.a. enten Q og R ligger på motsatte sider av $\overleftrightarrow{OP}$ eller at P og Q ligger på motsatt side av $\overleftrightarrow{OR}$. Da kalles $\angle POR$ for den korresponderende vinkelen til $\angle PQR$.





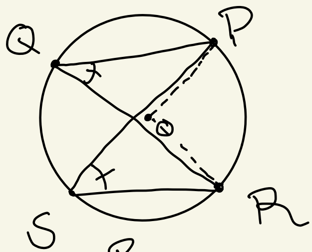
Teorem 8.3.9 (Sentralvinkelteoremet)
Vinkelmålet av en periferivinkel er halvparten av vinkelmålet til den korresponderende sentralvinkelen.

Def. av sirkelbue gitt av en periferi-vinkel.
De punktene på en sirkel $\mathcal{C}((0,r))$ som befinner seg i det indre av den gitte periferivinkelen.

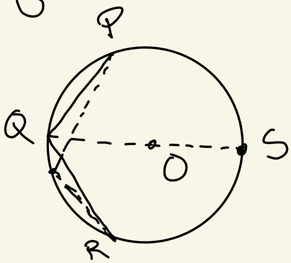


Korollar 8.3.10 (Periferivinkelteoremet)
Hvis to periferivinkler gir den samme sirkelbuen så er vinklene kongruente.

Bevis. Dersom det eksisterer en korresponderende sentralvinkel, følger resultatet av sentralvinkelteoremet (Teorem 8.3.9). Periferivinklene måler da $\frac{1}{2}$ av målet sentralvinkelen (som er felles).

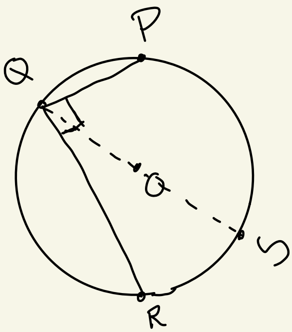


Generelt, la $\angle PQR$ være en periferivinkel. Velg S til å være antipodal med Q.



Periferivinklene $\angle PQS$ og $\angle SQR$ har sentralvinkler. Da kan vi bruke første halvdel av beviset på $\angle PQS$ og $\angle SQR$.

$\square$

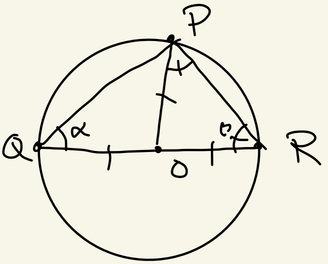


Bevis av sentralvinkelteoremet.

La $\angle PQR$ være en periferivinkel til sirkelen $\gamma = C(O, r)$ (hypotese).

Tre tilfeller: O ligger på en av sidene til $\angle PQR$, O er i det indre av $\angle PQR$, eller O er hverken på en av sidene til eller i det indre av $\angle PQR$.

Anta først $Q * O * R$.



La $\alpha = \mu(\angle OQP)$, $\beta = \mu(\angle ORP)$. Av likebeint-trekant-teoremet, $\mu(\angle QPO) = \alpha$, $\mu(\angle OPR) = \beta$.

Så $\sigma(\Delta QPR) = 2\alpha + 2\beta$, og

$2\alpha + 2\beta = 180°$ (Vinkelsumteoremet, EPP)

Vi har også at

$\mu(\angle POR) = 180° - 2\beta$, så

$$2\alpha + \cancel{2\beta} - \cancel{2\beta} = \mu(\angle POR),$$

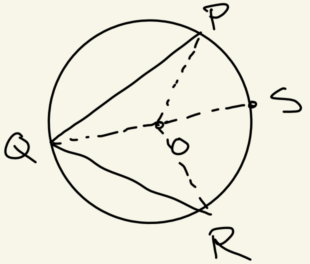
$$2\alpha = \mu(\angle POR),$$

så $\mu(\angle PQR) = \frac{1}{2}\mu(\angle POR)$.

Anta nå at O er i det indre av $\angle PQR$. La $S \in \gamma$ s.a. $Q * O * S$.

Da har vi

$\mu(\angle PQR) = \mu(\angle PQS) +$



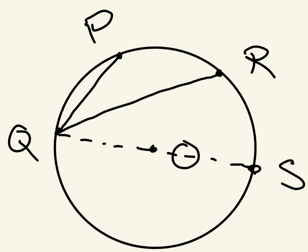
$$\mu(\angle PQR) = \mu(\angle SQR)$$

$$\mu(\angle POR) = \mu(\angle POS) + \mu(\angle SOR)$$

(vinkelmålspostulatet).

Så resultatet følger fra argumentet i det første tilfellet og ved addisjon.

Til slutt, anta at O hverken er i det indre av $\angle PQR$ eller på $\angle PQR$.



La $S \in \gamma$ s.a. $Q * O * S$. Enten er P i det indre av $\angle RQS$ eller R i det indre av $\angle PQS$.

Endre notasjon så det siste holder.

Da er $\mu(\angle PQR) = \mu(\angle PQS) - \mu(\angle RQS)$

$$\mu(\angle POR) = \mu(\angle POS) - \mu(\angle ROS)$$

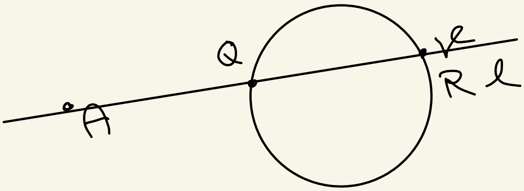
(vinkelmålspostulatet). Konklusjonen følger av det første tilfellet og subtraksjon.

$\square$

Et siste konsept:

Def. 8.3.11

La γ være en sirkel og A et punkt som ikke ligger på γ. Potensen til A mht. γ er definert som følger:



La ℓ være en linje gjennom A som skjærer γ. Dersom ℓ skjærer γ i to ulike punkt Q og R, definer potensen til å være $AQ \cdot AR$.

Hvis ℓ er tangent til γ i P, definer potensen til å være $(AP)^2$.

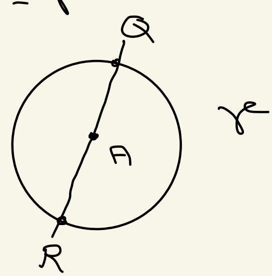
Potensen til et punkt avhenger ikke av valg av linje ℓ:

Teorem 8.3.12

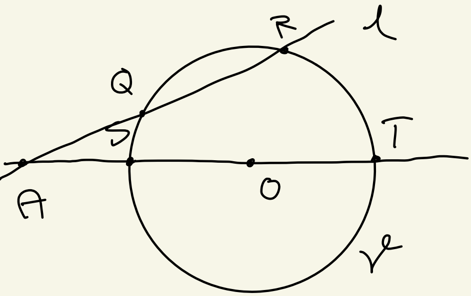
Potensen til et punkt (gitt sirkel γ) er veldefinert; det vil si, man får samme verdi uavhengig av hvilken linje ℓ som brukes i definisjonen så lenge l skjærer γ i minst et punkt.

Bevis. La γ være en sirkel og la r være radiusen til γ. La A være et punkt som ikke ligger på γ.

Hvis A er sentrum til γ så vil alle linjer gjennom A krysse γ i to punkt Q og R, og $AQ \cdot AR = r^2$ uavhengig av l.



Anta nå $A \neq O$, der O er sentrum til γ.



La S og T være de to punktene hvor $\overleftrightarrow{AO}$ krysser γ.

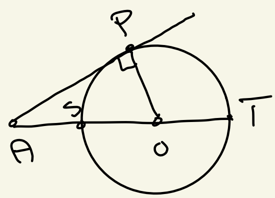
Vi må vise to ting:

1. dersom l er en sekantlinje gjennom A s.a. l krysser γ i Q og R, så er

$AQ \cdot AR = AS \cdot AT$.

2. dersom l er en tangentlinje til γ ved P, og går gjennom A er $(AP)^2 = AS \cdot AT$.

Bevis av 2.: Pytagoras teorem gir



$$(AP)^2 = (AO)^2 - (OP)^2$$
$$= (AO+OP)(AO-OP)$$
$$= (AO+OT)(AO-OS)$$
$$= AT \cdot AS.$$

Bevis av 1. i morgen!

$\square$