

8.3 Sirkler i Euklidisk geometri 20/3

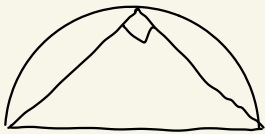
Det to første teoremer viser at en vinkel i en trekant måler 90° hvis siden ovenfor vinkelen er en diameter til omsirkelen.

Teorem 8.3.1

La $\triangle ABC$ være en trekant, og la M være midtpunktet på \overline{AB} . Hvis $AM = MC$, så måler $\angle ACB$ 90° .

Korollar 8.3.2

Hvis hjørnene i en trekant $\triangle ABC$ ligger på en sirkel og \overline{AB} er en diameter i sirkelen, så måler $\angle ACB$ 90° .



Bevis av teorem 8.3.1. La $\alpha = m(\angle BAC)$

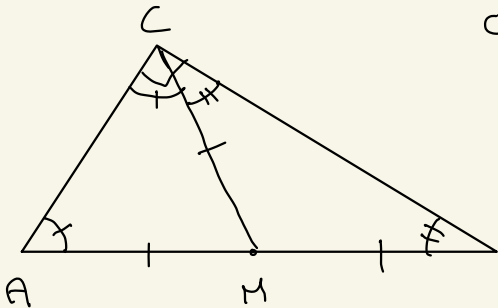
og $\beta = m(\angle ABC)$.

Av likebeint trekant teoremet har vi

$m(\angle ACM) = \alpha$ og

$m(\angle MCB) = \beta$.

Siden $A * M * B$, $m(\angle ACB) = m(\angle ACM) + m(\angle MCB)$.



Av EPP, $\sigma(\triangle ABC) = 180^\circ$, så

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \text{ og } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Det følger at $\mu(\angle ACB) = 90^\circ$. □

Det motsatte holder også:

Teorem 8.3.3.

La $\triangle ABC$ være en trekant og la M være midtpunktet på \overline{AB} .

Hvis $\angle ACB$ måler 90° , så vil $AM = MC$.

Bevis: øving.

Korollar 8.3.4

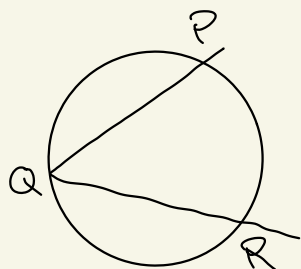
Hvis $\angle ACB$ måler 90° , vil \overline{AB} være en diameter i omsirkelen til $\triangle ABC$.

Definisjon 8.3.7 (Periferivinkel, sentralvinkel)

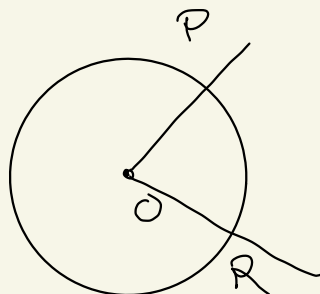
La $\gamma = C(0, r)$ være en sirkel.

En periferivinkel er en vinkel på formen $\angle PQR$ der $P, Q, R \in \gamma$.

En sentralvinkel er en vinkel på formen $\angle POR$ der $P, R \in \gamma$. O er centrum i sirkelen.

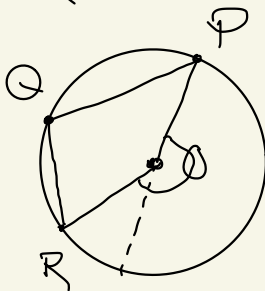
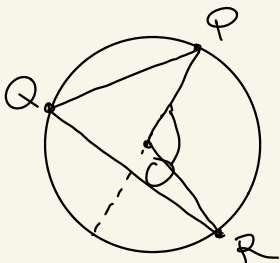


Periferivinkel



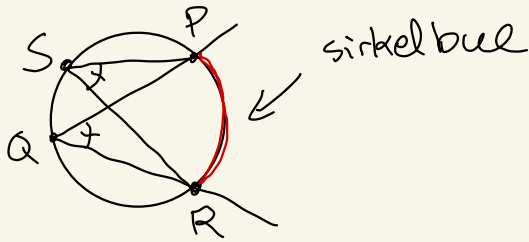
sentralvinkel.

Def. 8.3.8 Anta at $\angle PQR$ er en periferivinkel til $C(O, r)$ s.a. enten Q og R ligger på motsatte sider av \overleftrightarrow{OP} eller at P og Q ligger på motsatt side av \overleftrightarrow{OR} . Da kalles $\angle POR$ for den korresponderende vinkelen til $\angle PQR$.



Teorem 8.3.9 (Sentralvinkelteoremet)
Vinkelmålet α en periferivinkel er halparten α vinkelmålet til den korresponderende sentralvinkelen.

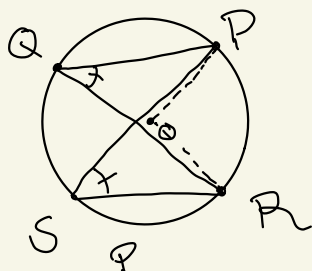
Def. α sirkelbue gitt α en ^{periferi-}vinkel.
De punktene på en sirkel $\gamma^r = ((0, r))$ som befinner seg i det indre α den gitte periferivinkelen.



Korollar 8.3.10 (Periferivinkelteoremet)
Hvis to periferivinkler gir den samme sirkelbuen så er vinklene kongruente.

Bevis. Dersom det eksisterer en korresponderende sentralvinkel, følger resultatet α sentralvinkelteorem (Teorem 8.3.9). Periferivinklene måler da $\frac{1}{2}$ α målet sentralvinkelen

(som er fælles).

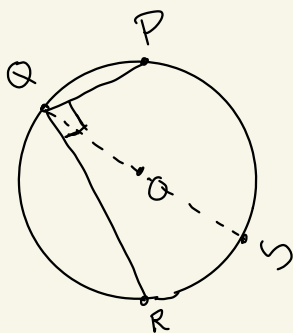
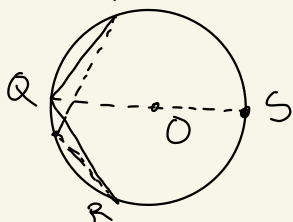


Generelt, la $\angle PQR$ være en periferivinkel. Velg S til å være antipodal med Q .

Periferivinklene $\angle PQS$ og $\angle SQR$ har sentralvinkler.

Da kan vi bruke første halvdel av beviset på $\angle PQS$ og $\angle SQR$.

□



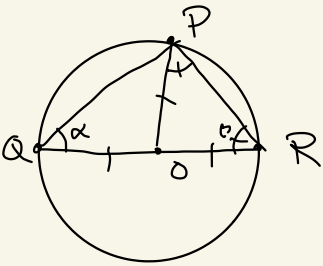
Bevis av sentralvinkelteoremet.

la $\angle PQR$ være en periferivinkel til sirkelen $\mathcal{K} = C(O, r)$ (hypotese).

Tre tilfeller: O ligger på en av sidene til $\angle PQR$, O er i det indre av $\angle PQR$, eller O er hverken på en

av sidene QO eller i det indre av $\angle PQR$.

Anta først $Q * O * R$.



La $\alpha = \mu(\angle OQP)$,

$\beta = \mu(\angle ORP)$. Av

likebeint-brekant-teoremet,

$\mu(\angle QPO) = \alpha$, $\mu(\angle OPR) = \beta$.

Så $\sigma(\triangle QPR) = 2\alpha + 2\beta$, og

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ (Vinkelsumteoremet, EPP)

Vi har også at

$\mu(\angle POR) = 180^\circ - 2\beta$, så

$2\alpha + 2\beta - 2\beta = \mu(\angle POR)$,

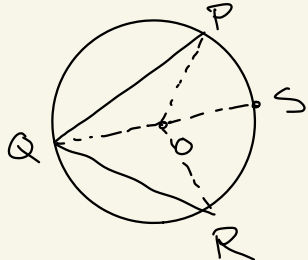
$2\alpha = \mu(\angle POR)$,

så $\mu(\angle PQR) = \frac{1}{2} \mu(\angle POR)$.

Anta nå at O er i det indre av $\angle PQR$. La $S \in \gamma$ s.a. $Q * O * S$.

Da har vi

$\mu(\angle PQR) = \mu(\angle PQS) +$

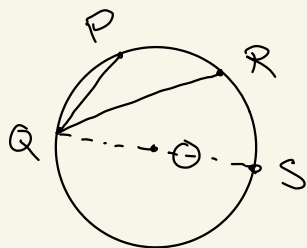


$$\mu(\angle SQR) \\ \mu(\angle POR) = \mu(\angle POS) \\ + \mu(\angle SOR)$$

(vinkelmålspostulatet).

Så resultatet følger fra argumentet i det første tilfellet og ved addisjon.

Til slutt, anta at O hverken er i det indre av $\angle PQR$ eller på $\angle PQR$.



La $S \in \mathcal{R}$ s.a. $Q * O * S$.
Enten er P i det indre av $\angle RQS$ eller R i det indre av $\angle PQS$.

Endre notasjon så det siste holder.

Da er $\mu(\angle PQR) = \mu(\angle PQS) - \mu(\angle RQS)$

$$\mu(\angle POR) = \mu(\angle POS) - \mu(\angle ROS)$$

(vinkelmålspostulatet). Konklusjonen

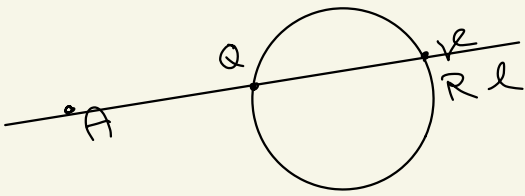
følger av det første tilfellet og subtraksjon.

□

Et siste konsept:

Def. 8.3.11

la γ være en sirkel og A et punkt som ikke ligger på γ . Potensen til A mht. γ er definert som følger:



la l være en linje gjennom A som skjærer γ . Dersom l skjærer γ i to ulike punkt Q og R , definer potensen til a være $AQ \cdot AR$.

Hvis l er tangent til γ i P , definer potensen til a være $(AP)^2$.

Potensen til et punkt avhenger ikke av valg av linje l :

Teorem 8.3.12

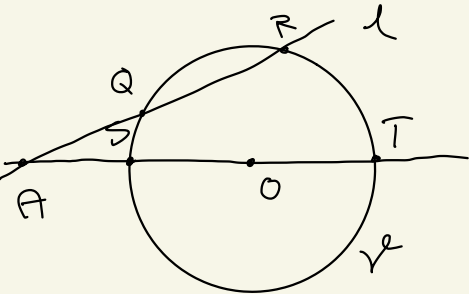
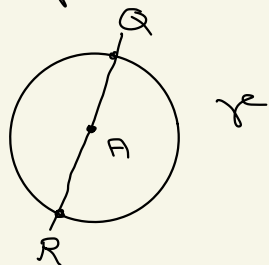
Potensen til et punkt (gitt sirkel γ) er veldefinert; det vil si, man får samme verdi uavhengig av hvilken linje l som brukes i definisjonen

så lenge l skjærer γ i minst et punkt.

Bevis, la γ være en sirkel og la r være radiusen til γ . la A være et punkt som ikke ligger på γ .

Hvis A er sentrum til γ så vil alle linjer gjennom A krysse γ i to punkt Q og R , og $AQ \cdot AR = r^2$ uavhengig av l .

Anta nå $A \neq O$, der O er sentrum til γ .



la S og T være de to punktene hvor \overleftrightarrow{AO} krysset γ .

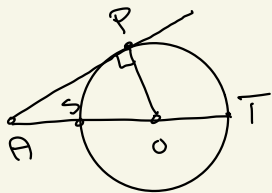
Vi må vise to ting:

1. dersom l er en sekantlinje gjennom A s.a. l krysset γ i Q og R , så er

$$AQ \cdot AR = AS \cdot AT.$$

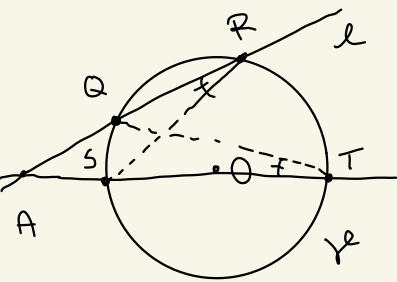
2. dersom l er en tangentlinje til γ ved P , er $(AP)^2 = AS \cdot AT$.
 og går gjennom A

Bevis av 2.: Pytagoras teorem
 gir



$$\begin{aligned} (AP)^2 &= (AO)^2 - (OP)^2 \\ &= (AO + OP)(AO - OP) \\ &= (AO + OT)(AO - OS) \\ &= AT \cdot AS. \end{aligned}$$

Bevis av 1.:



skal vise at $AQ \cdot AR = AS \cdot AT$ når l er en sekant til γ som går gjennom punktene $Q, R \in \gamma$.

Fordi begge periferi-
 vinklene $\angle ARS$ og
 $\angle ATQ$ inneholder den
 samme sirkelbuen,

så er $\angle ARS \cong \angle ATQ$ (Periferiinkelkongruens)

Videre er $\angle RAS \cong \angle TAQ$
(enten er de identiske eller
vertikale vinkler ~~\neq~~).
(topp)

Det følger at $\triangle ARS \sim \triangle ATQ$
(To vinkler er like store + vinkelsum
i en trekant er 180°).

Av teoremet for formlike trekanter

$$\frac{AR}{AS} = \frac{AT}{AQ} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{AR \cdot AQ}{\underline{\underline{\quad}}} = \frac{AT \cdot AS}{\underline{\underline{\quad}}}$$

□