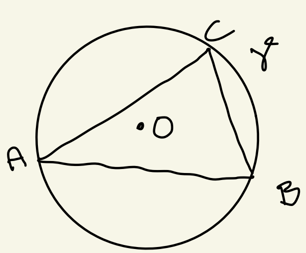
8.2 Sirkler og trekanter i nøytral geometri

14/3

Gitt tre ikke-kollineære punkt, eksisterer det en sirkel som inneholder alle tre? Ikke nødvendigvis.
Men det stemmer i Euklidsk geometri; EPP er ekvivalent med at det alltid eksisterer en sirkel som inneholder alle de tre punktene.

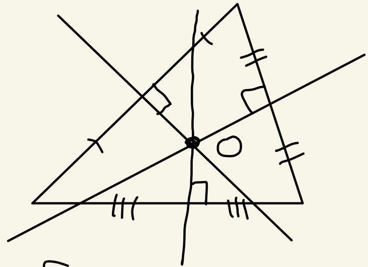
Mao, må tre hjørner i en trekant alltid ligge på en sirkel?

Def. 8.2.1
En sirkel som inneholder alle de tre hjørnene i en trekant, kalles en omsirkel til trekanten. Sentrum i en slik sirkel kalles omsenter.



Teorem 8.2.2 (Omsirkelteoremet)

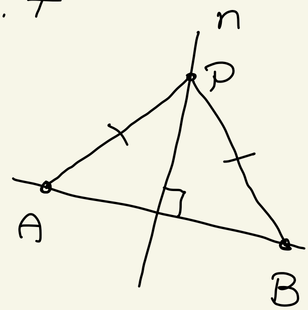
En trekant har en omsirkel hviss halveringsnormalene til sidene i trekanten møtes i et felles punkt.



Dersom omsirkelen eksisterer, er den og omsenteret unikt.

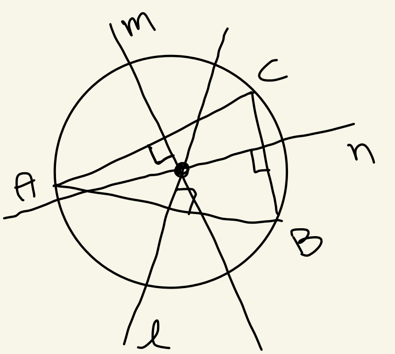
Vi skal bruke teorem 4.3.7

$P \in n$, der n er halveringsnormalen til $\overline{AB}$ hviss $AP = PB$.



Bevis av teorem 8.2.2.

La $\triangle ABC$ være en trekant, og la l, m og n være halveringsnormalene til $\overline{AB}, \overline{AC}$ og $\overline{BC}$.



Anta at l, m og n har et punkt O til felles.

Av teorem 4.3.7 er $AO = BO = CO$.

La $r = AO$; da vil $C(O, r)$ være en omsirkel til $\triangle ABC$.

Nå anta at $\triangle ABC$ har en omsirkel $\gamma = C(O,r)$, og la l, m og n være halveringsnormalene til sidene som beskrevet ovenfor.

Siden $AO = BO$, impliserer det at O ligger på l (Teorem 4.3.7). Det samme gjelder for m og n.

Så $O \in l$, $O \in m$ og $O \in n$.

Unikhet: Dersom $\triangle ABC$ har en omsirkel, så må O være det ene punktet s.a. $l \cap m \cap n = \{O\}$. Derfor er omsenteret unikt. Radiusen må være OA, så omsirkelen er også unik.

$\square$

Teorem 8.2.3

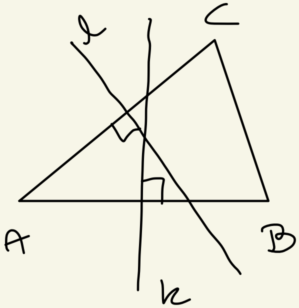
EPP er ekvivalent med at alle trekanter har en omsirkel.

Bevis i de to følgende teoremene.

Teorem 8.2.4

Dersom EPP holder, så har enhver trekant en omsirkel.

Bevis. Anta EPP og at $\triangle ABC$ er en trekant. La $m = \overleftrightarrow{AB}$ og la k være halveringsnormalen til $\overline{AB}$. La $n = \overleftrightarrow{AC}$, og la l være halveringsnormalen til $\overline{AC}$.



Vil vise at l og k må krysse.

Dersom $\overset{EPP}{\to}$ $l \parallel k$, vil $m = n$ eller $m \parallel n$ (teorem 4.7.3). Siden to linjer i en trekant hverken er like eller parallelle, kan vi konkludere at $l \not\parallel k$.

Dermed eksisterer det et punkt $O \in l \cap k$. La $r = OA$. Merk $OA = OB = OC$ (Teorem 4.3.7), så A, B og $C \in \mathcal{C}(O, r)$.

$\square$

Korollar 8.2.5

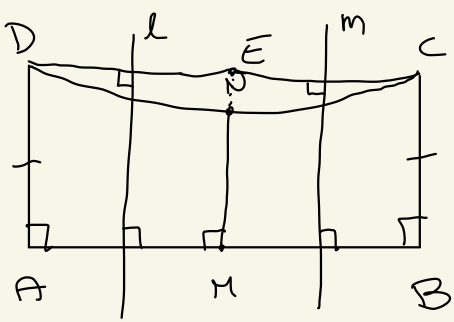
I Euklidsk geometri vil de tre halveringsnormalene alltid krysse i omsenteret til trekanten.

Teorem 8.2.6

Dersom EPP ikke holder, så eksisterer det en trekant som ikke har en omsirkel.

Bevis. Anta EPP ikke er sann.
Da holder HPP (Teorem 4.9.1), så vi kan bruke teoremene fra hyperbolsk geometri.

La $\square ABCD$ være en Saccheri-firkant med grunnseg. $\overline{AB}$ og toppseg. $\overline{CD}$. La M være midtpunktet på $\overline{AB}$ og N midtpunktet på $\overline{CD}$. Da er $MN < AD$ (Teorem 6.1.9).



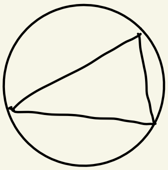
Velg $E \in \overrightarrow{MN}$ s.a. $ME = AD = BC$.

Vi skal vise at $\triangle CDE$ ikke har en omsirkel ved å vise at halveringsnormalene til $\overline{DE}$ og $\overline{EC}$ er parallelle. Da vet vi av Teorem 8.2.2 at det ikke eksisterer en omsirkel til $\triangle CDE$. Merk at $\square AMED$ og $\square MBCE$ også er Saccheri-firkanter ($\overleftrightarrow{MN}$ er normal til $\overline{AB}$) Teorem 4.8.10. La l være linjen gjennom midtpunktene på $\overline{AM}$ og $\overline{DE}$, og m linjen gjennom midtpunktene på $\overline{MB}$ og $\overline{EC}$. Av Teorem 4.8.10, $l \perp \overleftrightarrow{AB}$ og $m \perp \overleftrightarrow{AB}$, så $l \parallel m$ (AIVT). Også, $l \perp \overleftrightarrow{DE}$ og $m \perp \overleftrightarrow{CE}$ av Teorem 4.8.10. Så l og m er halveringsnormalene til hhv. $\overline{DE}$ og $\overline{CE}$.

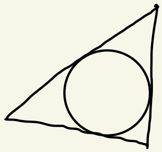
$\square$

Merk: man kan selvfølgelig konstruere trekanter som har en omsirkel også i hyperbolsk geometri. Start med en sirkel og velg tre ulike punkt på sirkelen.

Kan man finne innsirkler i nøytral geometri? Altså, sirkler som er tangent til de tre sidene i en trekant.



Omsirkel



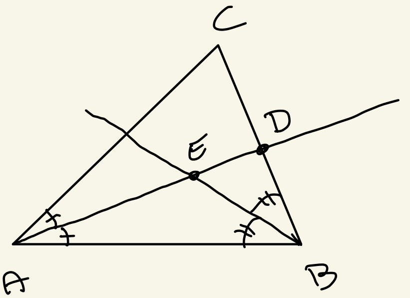
innsirkel

Definisjon 8.2.7 (Innsirkel)
La $\triangle ABC$ være en trekant. En sirkel $C(O,r)$ er en innsirkel til $\triangle ABC$ dersom hvert segment $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ og $\overline{BC}$ er tangent til $C(O,r)$. Sentrum O kalles da innsenter.

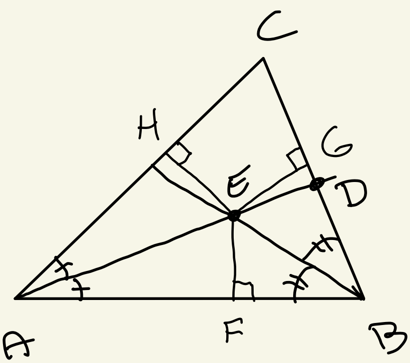
Teorem 8.2.8
Enhver trekant har en unik innsirkel. Halveringsstrålene til de indre vinklene i en trekant møtes i et felles punkt, og det punktet er innsenteret til trekanten.

Bevis. La $\triangle ABC$ være en trekant.

Av tverrliggerteoremet vet vi at vinkelhalveringsstrålen (VHS) til $\angle CAB$ krysser $\overline{BC}$ i et punkt D.



Ved tverrliggerteoremet igjen, vet vi at VHS til $\angle ABD$ skjærer $\overline{AD}$ i et punkt E. Merk at E er i det indre av $\angle ACB$. Vi skal vise at E er innsenteret til $\triangle ABC$.



La F, G og H være punktene der normalene fra E ned på hhv. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ og $\overleftrightarrow{AC}$ treffer linjene.

Både $\angle EAB$ og $\angle EBA$ måler $< 90°$ siden de er halverte vinkler i en trekant.

Så $A * F * B$ (lemma 4.8.6)

$G \in \overrightarrow{BC}$ og $H \in \overrightarrow{AC}$. Hvis ikke, vil $H * A * C$ som betyr at $\angle CAE$ er en ytre vinkel for $\triangle HAE$, men dette motsier YVT. Tilsvarende for $G \in \overrightarrow{BC}$.

Argument som i lemma 4.8.6.

VVS gir nå at $\Delta AEH \cong \Delta AEF$ og $\Delta BEF \cong \Delta BEG$, så $EH = EF = EG$. ha $r = EH$. Da ligger F, G, H på $C(E, r)$. Videre så er radiusene $\overline{EH}$, $\overline{EF}$ og $\overline{EG}$ normaler til sidene i trekanten, så $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$ er tangenter til $\gamma = C(E, r)$.

Siden E er like langt fra $\overleftrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{BC}$, og ligger i det indre av $\angle ACB$, så vil E være på VHS til $\angle ACB$ (Teorem 4.3.6).

Unikhet er en øvingsoppgave.

$\square$