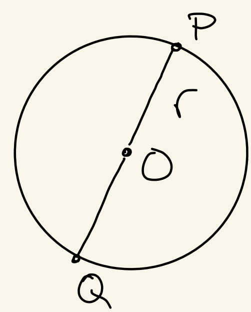
8.1 Sirkler og linjer i nøytral geometri

Definisjon 8.1.1 (Sirkel)
Gitt et punkt O og $r \in \mathbb{R}_+$, er sirkelen med sentrum O og radius r definert til å være mengden av alle punkt P s.a. avstanden fra O til P er r;

$$C(O,r) = \{P \mid OP = r\}.$$

Både $\overline{OP}$ og OP betegnes som radiusen til $C(O,r)$.



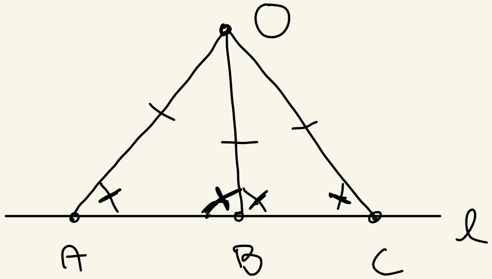
Definisjon 8.1.2
En korde er segmentet $\overline{PQ}$ der $P, Q \in C(O,r)$.
P og Q er antipodale dersom $P * O * Q$. Når P og Q er antipodale kalles $\overline{PQ}$ for diameteren til sirkelen.

Def. 8.1.3
Punkt A s.a. $OA < r$ er inni sirkelen, mens punkt A s.a. $OA > r$ er på utsiden av sirkelen.

Teorem 8.1.4
Dersom $\gamma = C(O,r)$ er en sirkel og l en linje, er antall punkt i $\gamma \cap l$ 0, 1 eller 2.

Bevis. La $\gamma = C(O,r)$ være en sirkel og l en linje. Anta at det eksisterer 3 punkt $A, B, C \in \gamma \cap l$ (RAA). Siden A, B, C er distinkte, kollineære punkt, kan de plasseres i rekkefølge; anta $A * B * C$. $A, B, C \in \gamma$, så

$$OA = OB = OC = r$$



Vi bruker likebeint-trekant-teoremet tre ganger:

$$\mu(\angle ABO) = \mu(\angle BAO) = \mu(\angle BCO) = \mu(\angle CBO).$$

Siden $\mu(\angle BAO) + \mu(\angle ABO) < 180°$ (Lemma 4.5.3), vet vi at $\mu(\angle ABO) < 90°$, og på lignende vis er $\mu(\angle CBO) < 90°$.

Men det er umulig at både $\angle ABO$ og $\angle CBO$ måler $< 90°$ ettersom de er supplementærvinkler. Så vi kan konkludere med at det er umulig at tre distinkte punkt ligger i $\gamma \cap \ell$.

$\square$

Def. 8.1.5-6 (Klassifisering av ℓ for γ)

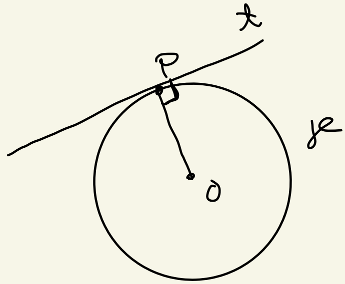
En linje er en tangent til sirkelen γ dersom $\gamma \cap \ell = \{P\}$, der P er ett punkt. ℓ er tangent til γ ved P.

Et segment $\overline{AB}$ er tangent til γ dersom $\gamma \cap \overline{AB} = \{P\}$, der $A \neq P$, $B \neq P$.

En linje ℓ er en sekant til γ dersom $\gamma \cap \ell = \{P, Q\}$, $P \neq Q$.

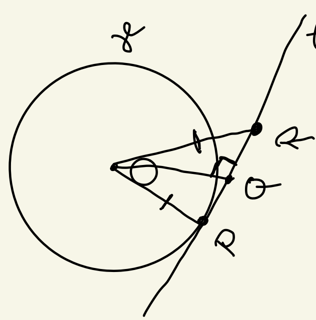
Teorem 8.1.7

La t være en linje, $\gamma = C(O, r)$ en sirkel og $P \in t \cap \gamma$. Linjen t er en tangent til γ ved P hviss $\overleftrightarrow{OP} \perp t$.



Bevis: La t være en linje og $\gamma = C(O, r)$ en sirkel s.a. t og γ krysser i punktet P.

Anta at t er en tangent til γ ved P. (Hypotese) Vi skal vise at $\overleftrightarrow{OP} \perp t$.



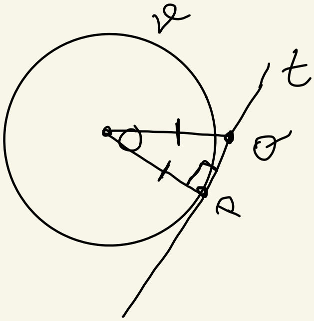
Konstruer en normal fra O ned på t. Vi må vise at $P = Q$.

Anta at $P \neq Q$ (RAA). Velg $R \in t$ s.a. $P * Q * R$ og $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$.

Av SVS, er $\triangle OPQ \cong \triangle ORQ$, så $OP = OR$. Det betyr at $R \in \gamma$

(def. av sirkel). Dette motsier det faktum at bare P ligger på både l og γ. Så hypotesen $P \neq Q$ må forkastes, og dermed er $P = Q$ og $\overleftrightarrow{PO} \perp t$.

Anta nå at $\overleftrightarrow{OP} \perp t$. Vi må vise at $t \cap \gamma$ består av ett punkt. (Det punktet P ettersom hypotesen sier $P \in \gamma \cap t$.)



Anta at det finnes et annet punkt $Q \in \gamma \cap t$. Da er $OP = OQ$ (def. av sirkel). ΔOPQ er en likebeint trekant.

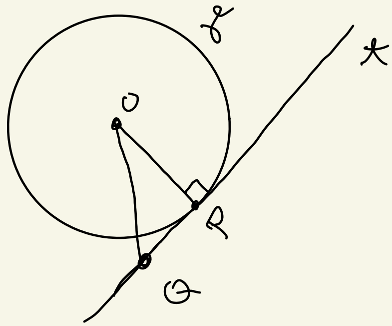
Av likebeint-trekant-teoremet er $\angle OPQ \cong \angle OQP$, så $\mu(\angle OQP) = 90°$, men dette motsier Lemma 4.5.3 (summen av to vinkler i en trekant er $< 180°$.), så $Q \notin \gamma \cap t$, og dermed er P det eneste punktet på γ og t. Det følger at t er en tangent til γ ved P.

$\square$

Teorem 8.1.8

Dersom γ er en sirkel og t en tangent til γ, så er alle punkt utenom $P \in \gamma \cap t$ på utsiden av γ.

Skisse av bevis

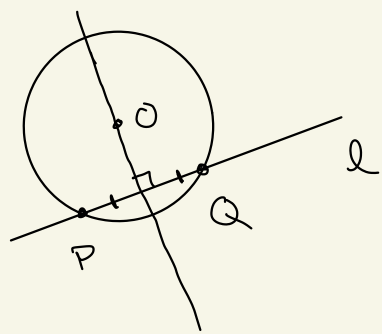


Skalene ulikheten gir at $QO > PO$.

Teorem 8.1.9 (Sekantlinjeteoremet)

Dersom $\gamma = C(O,r)$ er en sirkel og l en sekant som krysser γ i to ulike punkt P og Q, så ligger O på halveringsnormalen til korden $\overline{PQ}$.

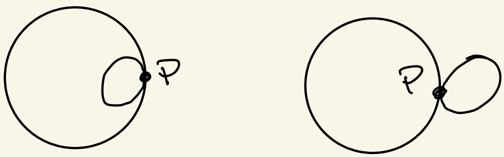
Bevis: øving.



Teorem 8.1.10

Ethvert punkt i det indre av $\overline{PQ}$ vil være på innsiden av γ, og ethvert punkt i $l \setminus \overline{PQ}$ vil være på utsiden av γ.

Definisjon 8.1.14 (Tangentsirkler)
Hvis $\gamma_1 = C(O_1, r_1)$ og $\gamma_2 = C(O_2, r_2)$ er to sirkler slik at $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{P\}$, så er de tangente.



Teorem 8.1.5 (Tangentsirkel teoremet)
$O_1 \neq O_2$, og O_1, O_2 og P er kollineære. γ_1 og γ_2 har en felles tangent.

Bevis: øving.

En linje ikke kan gå fra utsiden av $C(O,r)$ til innsiden uten å krysse sirkelen $C(O,r)$.

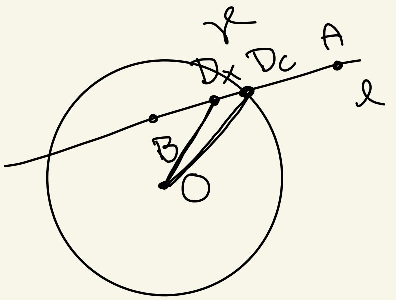
Teorem 8.1.11 (sirkulær kontinuitet)
Dersom $\gamma = C(O,r)$ er en sirkel og l er en linje s.a. $\exists$ et punkt

$A \in l$ på utsiden av γ og et punkt $B \in l$ på innsiden av γ, så er l en sekant til γ.

Vi trenger teorem 4.3.8, som sier at avstand er kontinuerlig.

Bevis. La $\gamma = C(O,r)$ være en sirkel og l en linje s.a. et punkt $A \in l$ er på utsiden av γ og et annet punkt $B \in l$ er på innsiden av γ. l er ikke en tangent til γ (teorem 8.1.8). Så vi trenger bare å vise at $\gamma \cap l \neq \emptyset$. (Teorem 8.1.4 sier da at $\gamma \cap l$ består av to punkt.)

Vi vil vise at $\exists$ et punkt mellom A og B s.a. det ligger på γ.



La $d = AB$. For enhver $x \in [0,d]$ så eksisterer det et unikt punkt $D_x \in \overline{BA}$ s.a. $BD_x = x$ (linjalpostulatet).

Definer $f : [0,d] \to [0,\infty)$

med $f(x) = OD_x$. Merk at $f(0) = OB < r$ og $f(d) = OA > r$.

Ettersom avstand er kontinuerlig (Teorem 4.3.8), så er f en kontinuerlig funksjon.

Skjæringssetningen (fra kalkulus) impliserer at det eksisterer en c s.a. $f(c) = r$. Punktet D_c er da det punktet vi leter etter; $OD_c = r$, så fra def av sirkel vil $D_c \in \gamma$. Så $D_c \in \gamma \cap l$.

$\square$

Korollar 8.1.12

Dersom γ er en sirkel og l en linje s.a. $A \in l$ er på innsiden av γ, da er l en sekant til γ.