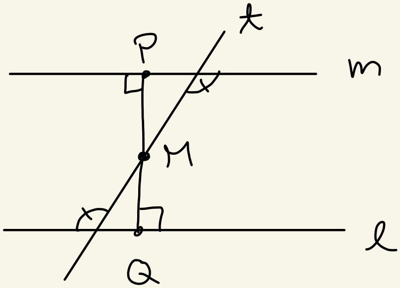
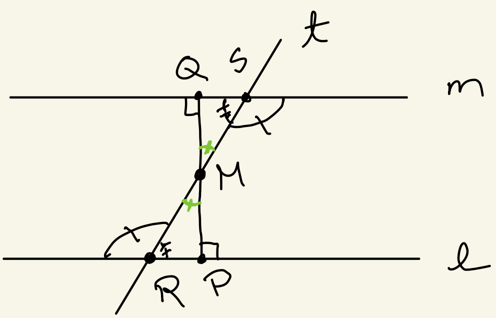
Teorem 6.2.5

La l og m være to parallelle linjer som skjæres av en transversal t.
Alternerende indre vinkler formet av l og m med t er kongruente hvis og bare hvis l og m har en fellesnormal og t skjærer fellesnormalsegmentet i midtpunktet dens.



M - midtpunktet
$\overline{PQ}$ - fellesnormalsegment.

Bevis. La l og m være to parallelle linjer som skjæres av en transversal t. Kall punktet der t skjærer m for S, og der t skjærer l for R.



Anta at begge par av AIV er kongruente. Vi må vise at l og m har en fellesnormal, og at t skjærer fellesnormalseg.

i midtpunktet.

Dersom A1V måler 90°, er t en fellesnormal til m og l og vi er ferdige. Vi antar at det ikke er tilfelle.

La M være midtpunktet på $\overline{RS}$. Konstruer normal fra M til l og fra M til m. Kall skjæringspunktene hhv. P og Q.

At A1V er på motsatt side av t og at de er kongruente kombinert med Ytre-vinkel-teoremet gir at P og Q er på motsatt side av t:

Dersom A1V < 90°, er de indre vinkler i $\triangle SQM$ og $\triangle RPM$, og dersom A1V > 90° vil de være ytre vinkler for de samme trekantene.

VVS gir $\triangle SQM \cong \triangle RPM$, $\angle SMQ \cong \angle RMP$.

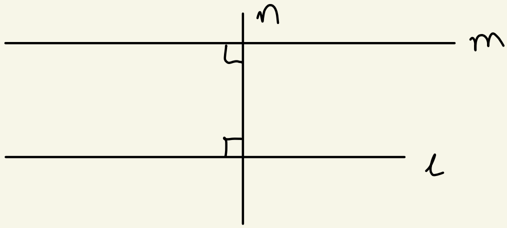
så $\overrightarrow{MP}$ og $\overrightarrow{MQ}$ er motsatte stråler (ex. 3.5.6), og $\overline{PQ}$ et felles normalsegment for l og m.

I tillegg så har vi at MP = MQ

Motsatt retning i ov 6.2.3. $\square$

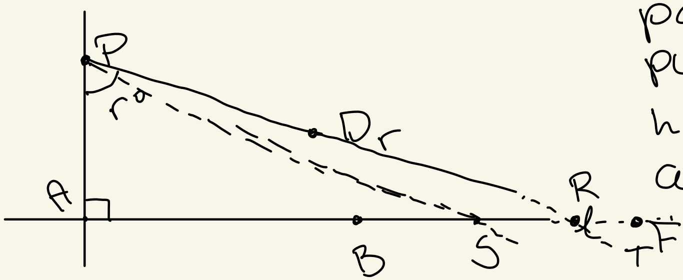
6.3 Parallellitetsvinkel

Dobbel normal konstruksjon gir automatisk en fellesnormal til to parallelle linjer.



Men det finnes en annen type parallelle linjer i hyperbolsk geometri. Disse har ikke en fellesnormal.

<u>Konstruksjon</u> La l være en linje og P et eksternt punkt. Konstruer en normal fra P ned på l. Kall skjæringspunktet for A. La $B \neq A$ være et annet punkt på l.



For ethvert reelt tall r, $0 \le r \le 90$, så eksisterer et punkt D_r, på samme side av $\overleftrightarrow{PA}$ som B, slik at $\mu(\angle APD_r) = r°$

(Gradskivepostulatet).

Definer

$$K = \{ r \mid \overrightarrow{PD_r} \cap \overrightarrow{AB} \neq \emptyset \}. \quad (*)$$

Definisjon 6.3.1

K kalles en "snittende" mengde for P og $\overrightarrow{AB}$.

Teorem 6.3.2

La K være (*) for P og $\overrightarrow{AB}$.
Hvis $r \in K$, så

1. $s \in K$ for alle s, $0 < s < r$, og
2. $\exists$ $t \in K$ s.a. $t > r$.

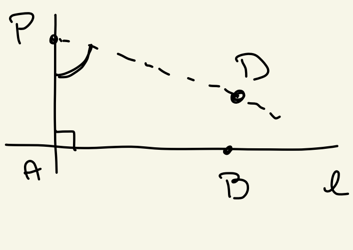
Def. 6.3.3 K er et halvåpent intervall $[0, r_0)$, hvor r_0 kalles det kritiske tallet (vinkelmålet) for P og $\overrightarrow{AB}$.

Bevis av teorem 6.3.2. La K være den snittende mengden til P og $\overrightarrow{AB}$. Plukk et tall $r \in K$. La R være det punktet hvor $\overrightarrow{PD_r}$

krysser $\overrightarrow{AB}$. Hvis $0<s<r$, er $\overrightarrow{PD_s}$ mellom $\overrightarrow{PA}$ og $\overrightarrow{PD_r}$ (mellomliggenhetsteorem for stråler), så $\overrightarrow{PD_s}$ må krysse $\overline{AR}$ i et punkt S (Tverrliggerteoremet), så $s \in K$. Velg et punkt T s.a. $A * R * T$ (linjalpost.) og definer $t = \mu(\angle APT)$. Siden $\overrightarrow{PD_t} \cap \overrightarrow{AB} \neq \emptyset$, så har vi $t \in K$. Videre er $t > r$ fra gradskivepost.

$\square$

Def. 6.3.4 Anta at P, A og B er punkter som i def. av en snittende mengde K, og at r_0 er det tilhørende kritiske tallet. La D være et punkt på samme side av $\overleftrightarrow{PA}$ som B slik at $\mu(\angle APD) = r_0$. Vinkelen $\angle APD$ kalles parallellitetsvinkelen til P og $\overrightarrow{AB}$.

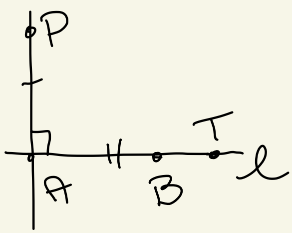


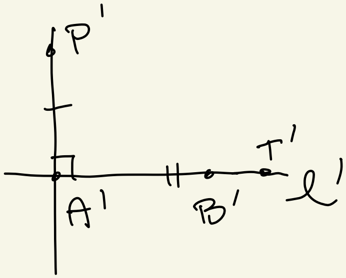
Teorem 6.3.5

Det kritiske tallet avhenger bare av $d(P, l)$.

(Og ikke hvilken side av $\overleftrightarrow{PA}$ man er på.)

Bevis. La l være en linje, La P være et eksternt punkt til l, A foten til normalen fra P ned på l og $B \in l$, $B \neq A$.
La P', l', A' og B' være en annen set-up $PA = P'A'$. Vi må vise at det kritiske tallet i de to tilfellene er det samme. Det gjør vi ved å vise





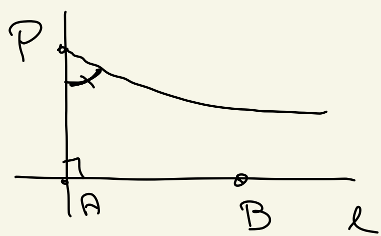
at de snittende mengdene er de samme. Kall de K og K'. Anta $r \in K$. Da snitter $\overrightarrow{PD_r}$ snitter $\overrightarrow{AB}$ i et punkt T. Velg T' på $\overrightarrow{A'B'}$ så.

$A'T' = AT$. Da er $\Delta PAT \cong \Delta P'A'T$ (SVS), så $r \in K'$. På likt vis får vi at hvis $r \in K'$, så $r \in K$. Dermed er $K = K'$.

$\square$

Def. 6.3.6

Gitt $x \in \mathbb{R}_+$, finn P og l s.a. $d(P, l) = x$. Definer $\kappa(x)$ til å være det kritiske tallet assosiert med P og l. Dvs. velg en $B \neq A$ på l og definerer $\kappa(x) = \mu(\angle APD)$, hvor $\angle APD$ er parallellitetsvinkelen til P og $\overrightarrow{AB}$



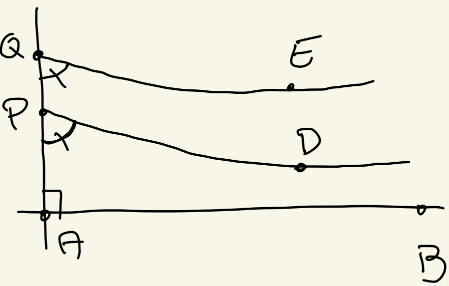
$\kappa : (0, \infty) \to (0, 90]$ kalles den kritiske funksjonen.

Avhenger kun av x, ikke av P, l eller B.

Teorem 6.3.7

$\kappa : (0,\infty) \to [0,90]$ er en ikke-økende funksjon; dvs. $a<b$ impliserer
$$\kappa(a) \geq \kappa(b).$$

Bevis. La $a,b \in \mathbb{R}_+$ s.a. $a<b$.
Velg punkt P, A, B, D s.a.
$PA = a$ og $\angle APD$ er parallellitets-vinkelen til P og $\overrightarrow{AB}$. Velg $Q \in \overrightarrow{AP}$ s.a. $QA = b$.



Vi må vise at $\parallel$-vinkelen ved Q ikke er større enn $\parallel$-vinkelen ved P.

Definer $r = \mu(\angle APD)$ og velg E på samme side av $\overleftrightarrow{AP}$ som B s.a. $\mu(\angle AQE) = r$.
Har $\overleftrightarrow{QE} \parallel \overleftrightarrow{PD}$ (korresponderende vinkler teoremet), så $\overrightarrow{QE}$ krysser ikke $\overrightarrow{AB}$, så r er ikke i den

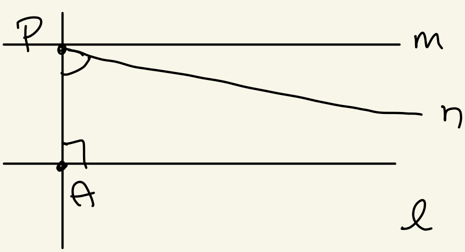
snittende mengden for Q og $\overrightarrow{AB}$. Det betyr at r ikke kan være mindre enn det kritiske tallet for Q og $\overrightarrow{AB}$ (Teorem 6.3.2). Så $\parallel$-vinkelen ved P (som måler $r°$), er større enn $\parallel$-vinkelen ved Q.

$\square$

I Euklidsk geometri så er $\parallel$-vinkelen alltid $90°$.

Teorem 6.3.8
Enhver parallellitetsvinkel måler strengt mindre enn $90°$.

Bevis: La l være en linje og P et eksternt punkt. Konstruer en normal fra P ned på l. Kall skjeringspunktet for A. Vi skal vise at $\kappa(PA) < 90$.



La m være en linje så. $P \in m$ og $m \perp \overleftrightarrow{PA}$. Vi vet at $m \parallel l$.

Fra HPP vet vi at $\exists$ en linje n s.a. $n \neq m$, $P \in n$ og $n \parallel l$. Siden n ikke er en normal til $\overleftrightarrow{PA}$, vil vinkelen mellom n og $\overrightarrow{PA}$ være $< 90°$ på en sidene av $\overleftrightarrow{PA}$.

Vinkelen er ikke i den snittende mengden, så det kritiske tallet må være mindre enn dette vinkelmålet. Dermed er

$$K(PA) < 90.$$

$\square$