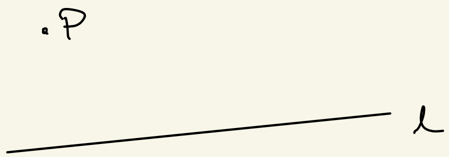
6/3

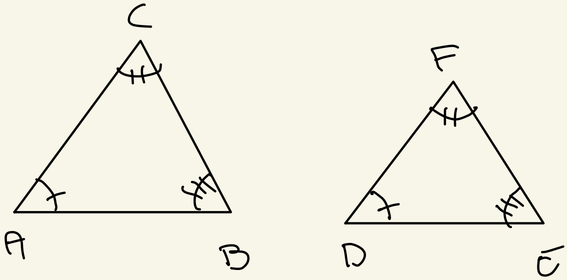
Forrige uke:

Euklidsk geometri: består av NG1 – NG6 + EPP



$\exists!\, m$ s.a. $P \in m$ og $m \parallel l$.

Vi viste fundamentalteoremet for formlike trekanter



$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

og Pytagoras teorem.

Vi så også på Ceva's teorem og Eulerlinjeteoremet.

Nå: (Aksiomatisk)

Hyperbolsk geometri

Aksiomer: NG1 – NG6 + HPP

HPP: $\exists$ m og n s.a. $P \in m$, $P \in n$ og $m \parallel l$, $n \parallel l$.

Modeller eksisterer, men vi venter med å studere disse.

Husk at HPP = ¬ EPP. Så ethvert utsagn ekvivalent med EPP er falskt i hyperbolsk geometri.

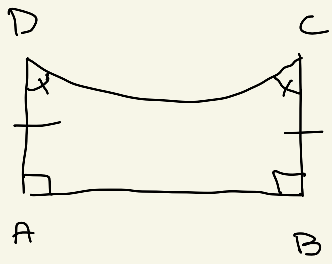
6.1 Basisteoremer

Teorem 6.1.1
For enhver trekant ΔABC, så er $\sigma(\Delta ABC) < 180°$.

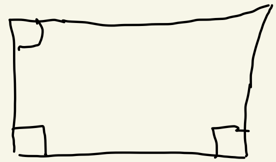
Så, enhver trekant ΔABC har defekt $0 < \delta(\Delta ABC) < 180°$. (Korollar 6.1.2)

Teorem 6.1.3
For enhver konveks firkant $\square ABCD$ er $\sigma(\square ABCD) < 360°$.

Korollar 6.1.4
Toppvinklene i Saccheri-firkanten er $< 90°$.

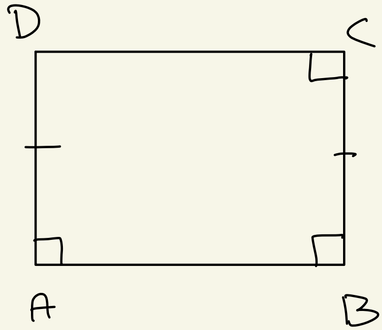


Korollar 6.1.5
Den fjerde vinkelen i
Lambert-firkanten er $<90°$.



Teorem 6.1.6
Det eksisterer ikke rektangel.

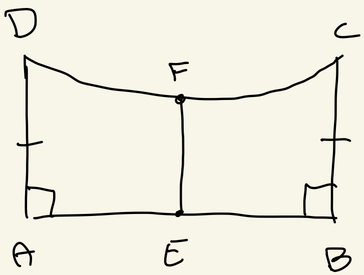
Teorem 6.1.7
I en Lambert-firkant
er lengden av siden
mellom to rettvinkler
strengt mindre enn lengden
av motsatt side.



Bevis: La $\square ABCD$ være en Lambert-firkant. Anta at hjørnene ved A, B og C er rettvinklede. Vi skal vise $BC < AD$. Vi vet at $BC \leq AD$ (Teorem 4.8.11), så vi må vise at $BC = AD$ er umulig.
Dersom $BC = AD$, så er $\square ABCD$ en Saccheri-firkant. Fra Teorem 4.8.10 vil da $\angle BAD \cong \angle CDA$. Det betyr at alle vinklene i $\square ABCD$ måler

90°, så $\square ABCD$ er et rektangel. Men, rektangler eksisterer ikke (Teorem 6.1.6), så $CB \neq AD$, og følgelig har vi $CB < AD$.

$\square$

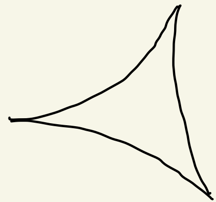


Definisjon 6.1.8
La $\square ABCD$ være en Saccheri-firkant med grunnlinje ("base") $\overline{AB}$. Segmentet som kobler midtpunktet på $\overline{DC}$ (F) med midtpunktet på $\overline{AB}$ (E) kalles høyden til $\square ABCD$ ($\overline{DE}$).

Korollar 6.1.9
Høyden i en Saccheri-firkant er kortere enn høyden til de to sidene.

Korollar 6.1.10
Lengden av toppsegmentet i en Saccheri-firkant er større enn lengden av grunnsegmentet.

I hyperbolsk geometri er formlike trekanter kongruente.



Teorem 6.1.1 (VVV)
Dersom vi har to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ s.a. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, så $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bevis: La $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ være to formlike trekanter. Vi skal vise at $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

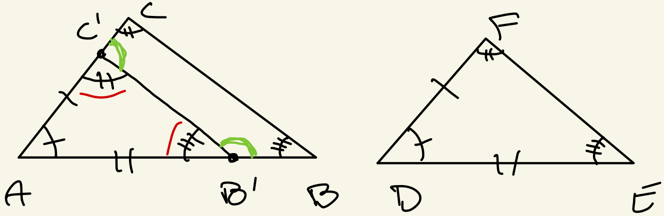
Hvis bare en av sidene i $\triangle ABC$ er kongruent med tilsvarende side i $\triangle DEF$, følger resultatet av VSV.

Vi antar at $AB \neq DE$, $BC \neq EF$ og $AC \neq DF$ (RAA).

Tre sammenligninger som kan gå to veier, så to må gå i samme retning.

Vi kan anta $AB > DE$ og $AC > DF$.

Velg B' på $\overline{AB}$ s.a. $AB' = DE$, og C' på $\overline{AC}$ s.a. $AC' = DF$.



Av teorem 4.6.7 er $\square BCC'B'$ en konveks firkant og $\triangle AB'C' \cong \triangle DEF$ av SVS.

Så $\angle AB'C' \cong \angle DEF$ og $\angle AC'B' \cong \angle DFE$.

Siden $\angle BB'C'$ er supplement til $\angle AB'C'$ og $\angle CC'B$ til $\angle AC'B$, så følger det at $\sigma(\square BCC'B') = 360°$.

Dette motsier teorem 6.1.3, så vi må forkaste RAA hypotesen og konkludere med at minst en av sidene i $\triangle ABC$ er kongruent med tilsvarende side i $\triangle DEF$.

Resultatet følger av VSV.

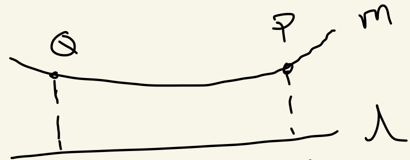
$\square$

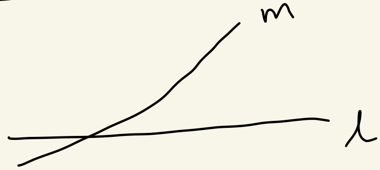
6.2 Fellesnormaler

Parallelle linjer kan ha varierende avstand fra hverandre:

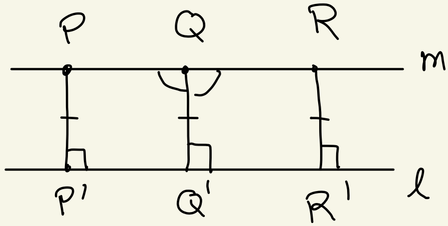
Teorem 6.2.1

Dersom l er en linje og P er et eksternt punkt, og m er en linje s.a. $P \in m$, så eksisterer det maks et annet punkt Q s.a. $Q \in m$ og $d(Q, l) = d(P, l)$.





Bevis: La l og m være to ulike linjer.
Anta at det eksisterer tre punkter P, Q og R s.a. $P, Q, R \in m$ og
$d(P, l) = d(Q, l) = d(R, l)$ (RAA hypotese).
La P', Q', R' være skjæringspunktene på l til normalene fra P, Q og R.



$P, Q, R \notin l$ ettersom $d(P, l) > 0$.

Så minst to av P, Q og R ligger på samme side av ℓ (plansep. postulatet). La oss si at det er P og Q. Da er $\square PP'Q'Q$ en Saccheri-firkant, så $\ell \parallel m$ (Teorem 4.8.10), og alle de tre punktene P, Q, R må ligge på samme side av ℓ.

Vi antar $P * Q * R$. Da er

$\square PP'Q'Q$ og $\square QQ'R'R$ begge Saccheri-firkanter.

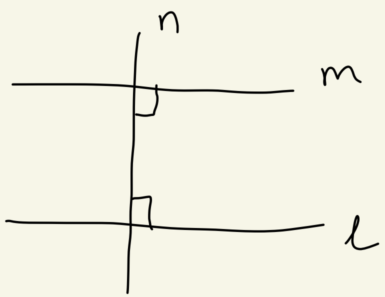
Så vinklene $\angle PQQ'$ og $\angle RQQ'$ er $< 90°$ (Korollar 6.1.4), men det motsier det faktum at de er supplementer ($\mu(\angle PQQ') + \mu(\angle RQQ') = 180°$).

Så RAA hypotesen må forkastes, og dermed så finnes det ikke tre ulike punkt på m som er like langt fra ℓ.

$\square$

Def. 6.2.2

Linjene l og m har en fellesnormal dersom $\exists$ en linje n s.a. $n \perp m$ og $n \perp l$. Dersom l og m har en fellesnormal n, så vil n krysse l i P og m i Q, hvor $\overline{PQ}$ er fellesnormalsegmentet til l og m.



Teorem 6.2.3

Dersom l og m er parallelle linjer og $\exists$ to punkt på m som er like langt fra l, da har l og m en fellesnormal.

Hint: Saccheri firkanter.

Teorem 6.2.4

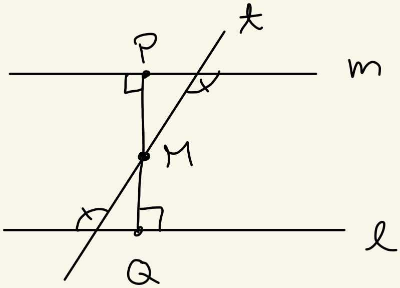
Dersom to linjer har en fellesnormal så er den unik.

Hint: Rektangler eksisterer ikke.

Teorem 6.2.5

La l og m være to parallelle linjer som skjæres av en transversal t.

Alternerende indre vinkler formet av l og m med t er kongruente hvis og bare hvis l og m har en fellesnormal og t skjærer fellesnormalsegmentet i midtpunktet dens.



M - midtpunktet.

$\overline{PQ}$ - fellesnormalsegment.