Uke 2, forelesning 2

Wednesday, 9 January 2019 13:34

Aksiomatiske systemer og insidensgeometri (Kap. 2)

Aksiomatisk system

Består av

1. udefinerte begrep
2. definisjoner
3. aksiomer
4. Teorem
5. Bevis

1. Tekniske begrep som ikke kan forklares. F.eks. punkt, linje, eller $\mathbb{R}$.

2. Vil starte med så få 1. som mulig. Bruke 1. for å definere alt annet.

3. Aksiomer (postulat) - utsagn som man aksepterer uten bevis.

4. og 5. Følgene av aksiomene. Bevisene skal følge en streng logisk organisering.

Tolkning: En måte å gi mening til det aksiomatiske systemet på. Kalles en modell når aksiomene er korrekte.

Uavhengig: (av et aksiomatisk system) dersom et utsagn hverken kan bekreftes eller avkreftes i det aksiomatiske systemet

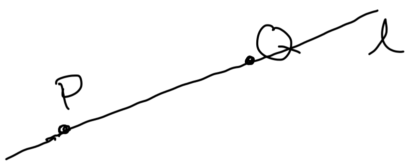
Konsistent: Aksiomene er konsistente dersom man ikke kan dedusere en logisk motsigelse fra de.
Sjekkes med modeller.

Starteksempel: Insidensgeometri

Udefinerte begrep: punkt, linje, ligge på (insident)

Insidensaksiomene

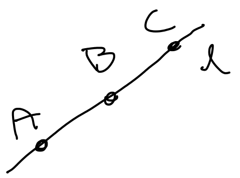
1. For ethvert par av forskjellige punkter P og Q så finnes det kun en linje l slik at både P og Q ligger på l.



2. For enhver linje l så eksisterer det minst to distinkte punkt P og Q slik at både P og Q ligger på l.

3. Det eksisterer tre punkter slik at ikke alle ligger på en linje.

Definisjon: Tre punkter A, B og C er kollineær dersom det eksisterer en linje l slik at A, B og C ligger på l.



Punktene ikke-kollineær dersom det ikke eksisterer en slik linje l.

Reformulering av aksiom 3:
Det eksisterer tre ikke-kollineære punkt.

Tre-punktsgeometrien

La punkt bety et tre symbolene A,B eller C. La linje bety en mengde med to punkt: $\{A,B\}$, $\{A,C\}$ og $\{B,C\}$

Tre-punkts linje

La punkt være A,B eller C.
Tolk linje til å være $\{A,B,C\}$.

Det kartesiske planet

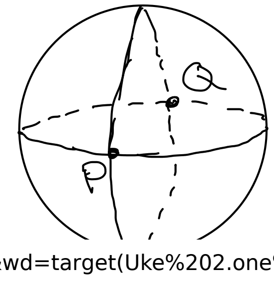
Tolk punkt til å være (x,y), hvor $x,y \in \mathbb{R}$. En linje er samlingen med punkt som oppfyller $ax+by+c=0$, hvor $a,b,c \in \mathbb{R}$.
Et punkt ligger på en linje dersom det oppfyller ligningen.

$$y = ax + b,$$

Sfæren (x,y,z)

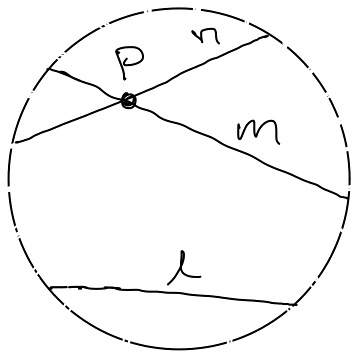
Tolk punkt til å være et punkt på overflaten til en sfære
Et punkt er (x,y,z), $x,y,z \in \mathbb{R}$ slik at $x^2+y^2+z^2=1$.
Tolk linje til å være en "stor sirkel" rundt sfæren.

Dette er ikke en modell i insidensgeometri. Det finnes mer enn en linje gjennom punkt P og Q



gjennom punkt P og Q
(aksiom 1 holder ikke.)

Klein disken



Tolk punkt til å være (x,y), $x,y \in \mathbb{R}$ slik at

$$x^2+y^2<1$$

En linje er en del av en Euklidsk linje som ligger inne i sirkelen.

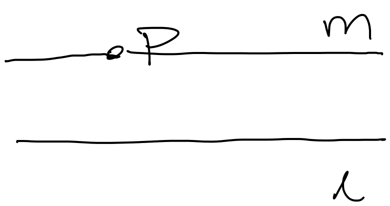
Parallellpostulatene

Definisjon: To linjer m og l er parallelle dersom det ikke eksisterer et punkt P slik at P ligger både på l og m.

Symbol: $l \parallel m$

Euklidsk parallellpostulat

For enhver linje l og for ethvert punkt P som ikke ligger på l, så finnes det en, og bare en, linje m slik at P ligger på m og $m \parallel l$.



Det elliptiske parallellpostulatet

For enhver linje l og ethvert punkt P som ikke ligger på l, så finnes det ingen linje m slik at P ligger på m og $m \parallel l$.

Det hyperbolske parallellpostulatet
For enhver linje l og ethvert punkt P som ikke ligger på l, så finnes det minst to linjer m og n slik at P ligger på både m og n og $m \parallel l$ og $n \parallel l$.

Teoremer, bevis og logikk

Matematisk språk: konsist, tydelig og utvetydig.

Utsagn: linjer som ikke er parallelle skjærer hverandre i et punkt.

Omformulering: Hvis l og m er to forskjellige linjer som ikke er parallelle, så eksisterer det et punkt P slik P ligger både på m og l.

Har en start, en slutt og et rammeverk for hvordan beviset bør/kan settes opp.

Utsagn: - en påstand som enten er

sann eller usann.

- kun inneholde og, eller, eller en negasjon.

Proposisjonelle funksjoner

$P(x) = (x > 0)$

$l \parallel m$

$l \nparallel m$

Kondisjonelle utsagn

"Hvis ..., da ..." $P \Rightarrow Q$

Hypotese $\Rightarrow$ konklusjon.

- Motsatte: $Q \Rightarrow P$
- Kontrapositivt: ikke $Q \Rightarrow$ ikke P

Eksempel:

$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ (direkte)

$x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$ (motsatt)

$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ (kontrapositivt)

Bikondisjonelle utsagn:

"Hvis og bare hvis"

$x = 0$, $x^2 = 0$

Kvantorer

$\exists$ "det eksisterer"

$\forall$ "for alle"

$\exists!$ "ikke mer enn en, ikke mindre enn en."