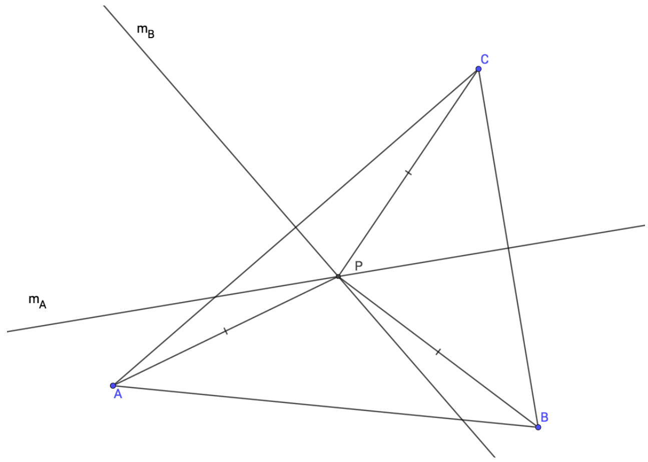
Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

5.6 5 La ΔABC være en trekant, og la m_A,m_B og m_C være midtnormalene på de tre sidene av trekanten som vist i figuren. Vi viser først at m_A og m_B skjærer hverandre, altså at de ikke er parallelle. Anta ad absurdum at $m_A \parallel m_B$. Av del 3 av teorem 4.7.3 må da enten $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BC}$ eller $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, noe som er umulig siden $\overline{AC}$ og $\overline{BC}$ er sider i en trekant.

Kall skjæringspunktet mellom m_A og m_B for P. Av punktvis karakterisering av midtnormaler, altså teorem 4.3.7, er $AP = CP$ siden P ligger på m_B, og $BP = CP$ siden P ligger på m_A, se figur 1. Sammen gir disse likhetene at $AP = BP$, og av punktvis karakterisering av midtnormal betyr dette at $P \in m_C$, altså skjærer alle midtnormalene hverandre i P.

Legg merke til at vi også har vist at omsenteret P ligger like langt fra alle hjørnene i trekanten ΔABC, siden $AP = BP = CP$.



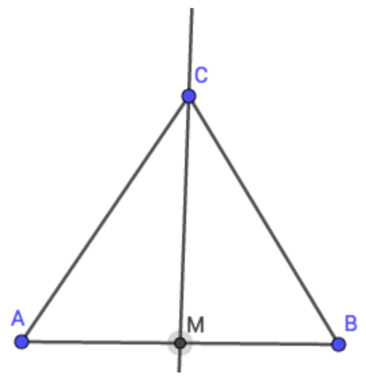
Figur 1: Figur til beviset av at midtnormalene skjærer hverandre i et punkt. P er skjæringspunktet til m_A og m_B, og vi bruker punktvis karakterisering av midtnormaler til å vise at P også ligger på m_C.

5.6 11 Vi skal vise at en trekant ΔABC er likesidet hvis og bare hvis omsenteret (=circumsenter) og sentroiden (=centroid) sammenfaller. Vi minner om at sentroiden er definert som skjæringspunktet mellom *medianene*[1], og at omsenteret er definert som skjæringspunktet mellom midtnormalene på sidene til trekanten.

Anta at ΔABC er likesidet. For å vise at sentroiden og omsenteret sammenfaller, er det nok å vise at medianene og midtnormalene til trekanten sammenfaller – da har vi vist at linjene som definerer omsenteret og sentroiden er like. La M være midtpunktet

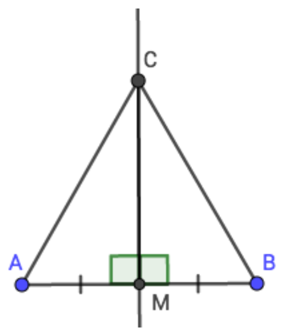
[1] En median er ei linje fra et hjørne i trekanten til midtpunktet på motsatt side.

på $\overline{AB}$, vi viser at medianen $\overleftrightarrow{CM}$ er midtnormalen til $\overline{AB}$. Beviset for at de andre medianene er midtnormaler er identisk. Vi vet at $AC = BC$ siden ΔABC er likesidet. Dermed sier teorem 4.3.7 at C ligger på midtnormalen til $\overline{AB}$. Men da vet vi at M og C både ligger på medianen gjennom C og på midtnormalen til $\overline{AB}$. Siden to punkt bestemmer ei entydig linje, må derfor medianen og midtnormalen sammenfalle.



Figur 2: Figur til første del av oppgave 5.6 11. Vi har tegner inn medianen gjennom C og midtpunktet M på $\overline{AB}$. Siden trekanten er likesidet gir teorem 4.3.7 at C også ligger på midtnormalen til $\overline{AB}$, og vi konkluderer med at midtnormalen og medianen gjennom M sammenfaller.

Anta så at omsenteret og sentroiden sammenfaller; kall dette punktet P. Dette må bety at medianene og midtnormalene til trekanten sammenfaller. Betrakt for eksempel medianen gjennom C og midtnormalen til $\overline{AB}$. Per antagelse ligger P både på medianen gjennom C og midtnormalen til $\overline{AB}$, og per definisjon ligger også M på begge disse linjene, der M er midtpunktet på $\overline{AB}$. Siden de to punktene M og P bestemmer ei unik linje, må medianen og midtnormalen sammenfalle.
Vi viser at $AC = BC$, beviset for $AB = BC$ er identisk. Vi vet at $\overline{CM} \perp \overline{AB}$[2]. Vi betrakter de rettvinklede trekantene ΔAMC og ΔBMC. Linjestykket $\overline{MC}$ er felles i de to trekantene, og $AM = BM$ siden M er midtpunktet på $\overline{AB}$. Dermed gir SAS at $\Delta AMC \cong \Delta BMC$, og spesielt må $AC = BC$.



Figur 3: Figur til andre del av oppgave 5.6 11. Siden omsenteret og sentroiden sammenfaller, viser vi at $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{CM}$. Da gir en enkel anvendelse av SAS at $\Delta AMC \cong \Delta BMC$, og spesielt $AC = BC$. På tilsvarende vis kan vi vise at $AB = BC = AC$.

[2] Linja $\overleftrightarrow{CM}$ er medianen til trekanten gjennom C og M per definisjon. Siden medianene og midtnormalene sammenfaller, er $\overleftrightarrow{CM}$ også midtnormalen til $\overline{AB}$, slik at $\overline{CM} \perp \overline{AB}$.

$\boxed{\text{5.6 14}}$ I denne oppgaven er A og B to ulike punkt.

a) Vi skal vise at for alle reelle tall $x \neq -1$ finnes et unikt punkt på $\overleftrightarrow{AB}$ slik at[3] $AX/XB = x$. Vi deler beviset i fire deler. Først bruker vi teorem 3.2.16 til å finne en koordinatfunksjon $f : \overleftrightarrow{AB} \to \mathbb{R}$ slik at $f(A) = 0$ og $f(B) > 0$.

- Hvis $x = 0$ kan vi åpenbart velge $X = A$. Da er $AX = 0$, og siden $A \neq B$ er $BX \neq 0$, slik at $AX/XB = 0$. Denne X er også unik, siden

  $$AX/XB = 0$$

  impliserer at $AX = 0$, som betyr at $X = A$.
- Anta $x > 0$. Hvis vi har X slik at $AX/XB = x$, må $A{*}X{*}B$ av definisjonen av "sensed ratio", siden vi trenger at $AX/XB > 0$. Av teorem 3.2.17 må vi derfor ha at $f(A) = 0 < f(X) < f(B)$. Siden f er en koordinatfunksjon vet vi at

  $$AX = |f(A) - f(X)| = f(X)$$

  og at

  $$BX = |f(B) - f(X)| = f(B) - f(X),$$

  der vi har brukt $f(A) = 0 < f(X) < f(B)$ til å fjerne absoluttverditegnet. Dermed kan vi uttrykke $\frac{AX}{XB}$ ved hjelp av f:

  $$\frac{AX}{XB} = \frac{f(X)}{f(B) - f(X)} = x,$$

  og hvis vi løser denne ligningen for $f(X)$ får vi

  $$f(X) = \frac{x}{x+1} f(B).$$

  Oppsummert trenger vi altså en $X \in \overleftrightarrow{AB}$ slik at $f(X) = \frac{x}{x+1} f(B)$, og en unik slik X finnes siden f er en koordinatfunksjon, og dermed spesielt en bijeksjon.
- Anta $-1 < x < 0$. Hvis vi har X slik at $AX/XB = x$, må $X * A * B$ eller $A{*}B{*}X$ av definisjonen av "sensed ratio", siden vi trenger at $AX/XB < 0$[4]. Siden vi ønsker X med $\frac{AX}{XB} < 1$, der brøken er en vanlig brøk, trenger vi at $AX < XB$, noe som betyr at vi må ha $X * A * B$[5] Formulert ved funksjonen f krever vi altså at $f(X) < 0 = f(A) < f(B)$. Da er

  $$AX = |f(A) - f(X)| = -f(X)$$

  og at

  $$BX = |f(B) - f(X)| = f(B) - f(X),$$

  der vi har brukt $f(X) < 0 = f(A) < f(B)$ til å fjerne absoluttverditegnet. Dermed kan vi uttrykke $\frac{AX}{XB}$ ved hjelp av f:

  $$\frac{AX}{XB} = \frac{-f(X)}{f(B) - f(X)} = -x.$$

[3] Denne brøken tolkes som en "sensed ratio", som vil si at AX/XB er positiv hvis $A * X * B$ og negativ ellers. I absoluttverdi er AX/XB lik verdien av den vanlige brøken AX/XB.

[4] Og $AX/XB > 0$ hvis og bare hvis $A * X * B$.

[5] Hvis $A * B * X$ er $AX = AB + BX$, slik at $AX > BX$, noe vi ikke ønsker.

Vi løser denne ligningen[6] for X, og får at

$$f(X) = \frac{x}{1+x}.$$

At det finnes en unik X som tilfredsstiller denne ligningen følger igjen av at f er en bijeksjon.

- Anta $x < -1$. Hvis vi har X slik at $AX/XB = x$, må $X * A * B$ eller $A * B * X$ som over. Siden vi ønsker X med $\frac{AX}{XB} > 1$, der brøken er en vanlig brøk, trenger vi at $AX > XB$, noe som betyr at vi må ha $A*B*X$. Formulert ved funksjonen f krever vi altså at $0 = f(A) < f(B) < f(X)$. Da er
$$AX = |f(A) - f(X)| = f(X)$$
og at
$$BX = |f(B) - f(X)| = f(X) - f(B),$$
der vi har brukt $0 = f(A) < f(B) < f(X)$ til å fjerne absoluttverditegnet. Dermed kan vi uttrykke $\frac{AX}{XB}$ ved hjelp av f:
$$\frac{AX}{XB} = \frac{f(X)}{f(X) - f(B)} = -x.$$
Vi løser denne ligningen for X, og får at
$$f(X) = \frac{-x}{1+x}.$$
At det finnes en unik X som tilfredsstiller denne ligningen følger igjen av at f er en bijeksjon.

b) Vi skal vise at det ikke finnes et punkt $X \in \overleftrightarrow{AB}$ slik at $AX/XB = -1$, der brøken fremdeles tolkes som en "sensed ratio". Av korollar 3.2.19 har vi enten at $X \in \overline{AB}$, $X * A * B$ eller $A * B * X$.

- Hvis $X \in \overline{AB}$, sier definisjonen av "sensed ratio" at AX/XB er positiv. Dermed er spesielt $AX/XB \neq -1$.
- Hvis $A * B * X$, er $AB + BX = AX$ per definisjon av mellomliggenhet. Dermed er
$$\frac{AX}{BX} = \frac{AB + BX}{BX} = 1 + \frac{AB}{BX} > 1,$$
slik at $AX/XB \neq -1$.
- Hvis $X * A * B$ er $AX + AB = XB$ av definisjonen av mellomliggenhet. Dermed er
$$\frac{AX}{XB} = \frac{AX}{AX + AB} < 1,$$
slik at $AX/XB \neq -1$.

c) Vi skal lage en graf som illustrerer hvordan AX/XB varierer med punktet $X \in \overleftrightarrow{AB}$. For å lage en graf antar vi at A og B er to tall på den reelle tallinjen med

[6] Grunnen til at vi setter uttrykket lik $-x$ og ikke x, er at $x < 0$ og venstresiden er positiv. Strengt tatt løser vi ligningen $|AX/XB| = |x|$.

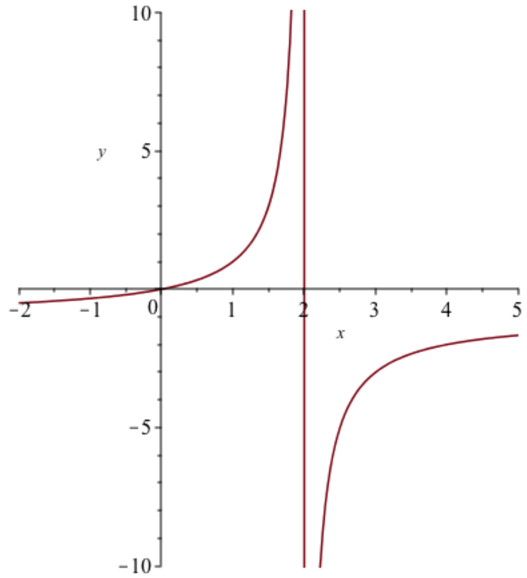
$A < B$, og vi lar $\overleftrightarrow{AB}$ være x-aksen i grafen vår. For $X \in \mathbb{R}$ er da $AX = |X - A|$ og $BX = |X - B|$, slik at

$$\frac{AX}{BX} = \begin{cases} \frac{X-A}{X-B} \text{ for } X > B \\ \frac{X-A}{B-X} \text{ for } A < X < B \\ \frac{X-A}{X-B} \text{ for } X < A. \end{cases}$$

Her har vi bare brukt definisjonen av absoluttverdi for å skrive ut uttrykket for den vanlige brøken $\frac{AX}{BX}$. Men vi skal lage en graf av AX/BX, altså en "sensed ratio", og AX/XB er definert slik at fortegnet er positivt når $A < X < B$, og negativt ellers. Ergo

$$AX/BX = \begin{cases} -\frac{X-A}{X-B} \text{ for } X > B \\ \frac{X-A}{B-X} \text{ for } A < X < B \\ -\frac{X-A}{X-B} \text{ for } X < A. \end{cases}$$

Men det er lett å se at disse tre uttrykkene alltid er like, slik at $AX/BX = \frac{X-A}{B-X}$. For å faktisk lage en graf velger vi $A = 0$ og $B = 2$, slik at $AX/BX = \frac{x}{2-x}$, se grafen under.



Figur 4: Graf av AX/BX når $A = 0$ og $B = 2$.