



**4.8 1** La  $\triangle ABC$  være en trekant og  $E$  et punkt i det indre av  $\overline{BC}$ . Vi skal vise at

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABE) + \delta(\triangle ECA).$$

Ved å skrive ut definisjonen av  $\delta$ , ser vi at dette er ekvivalent med å vise at

$$180^\circ - \sigma(\triangle ABC) = 180^\circ - \sigma(\triangle ABE) + 180^\circ - \sigma(\triangle ECA).$$

Med enkel algebra ender vi opp med

$$\sigma(\triangle ABC) + 180^\circ = \sigma(\triangle ABE) + \sigma(\triangle ECA).$$

Denne siste likheten, som vi altså må vise, er nettopp innholdet i lemma 4.5.4, og dermed er har vi vist resultatet.

**4.8 2** Se figuren: vi skal vise at når  $\square ABCD$  er en konveks firkant, er  $\delta(\square ABCD) = \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle ACD)$ .

En del av definisjonen av konveks (definisjon 4.6.2), er at  $A$  ligger i det indre av  $\angle BCD$ . Dermed gir del 4 av gradskivepostulatet<sup>1</sup> at

$$\mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) = \mu(\angle BCD),$$

og på akkurat samme måte viser vi at

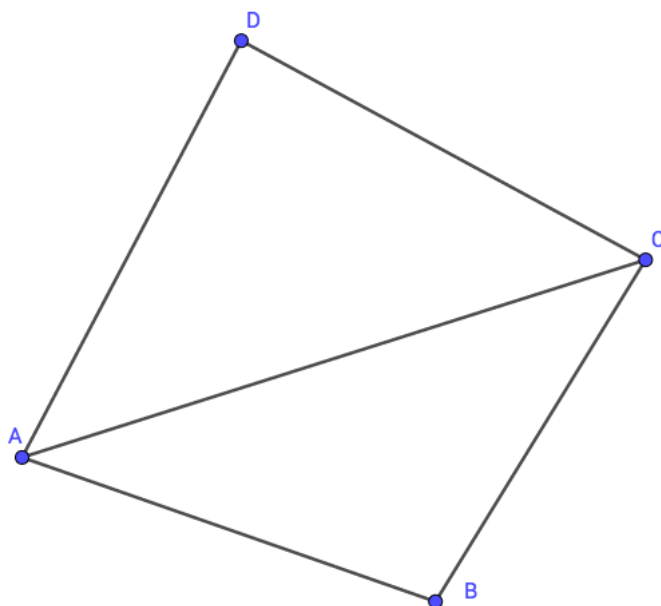
$$\mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) = \mu(\angle DAB).$$

Vi fullfører nå beviset med litt algebra:

$$\begin{aligned} \delta(\square ABCD) &= 360^\circ - \sigma(\square ABCD) \\ &= 360^\circ - (\mu(\angle ABC) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) + \mu(\angle BCD)) \\ &= 360^\circ - (\mu(\angle ABC) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) + \mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD)) \\ &= 360^\circ - (\sigma(\triangle ABC) + \sigma(\triangle ACD)) \\ &= (180^\circ - \sigma(\triangle ABC)) + (180^\circ - \sigma(\triangle ACD)) \\ &= \delta(\triangle ABC) + \delta(\triangle ACD). \end{aligned}$$

Det meste i denne utregningen er å skrive ut definisjonen av  $\delta$  og  $\sigma$ , og i overgangen fra linje 2 til linje 3 bruker vi  $\mu(\angle BCA) + \mu(\angle ACD) = \mu(\angle BCD)$  og  $\mu(\angle DAC) + \mu(\angle CAB) = \mu(\angle DAB)$ .

<sup>1</sup>Betingelsen for å bruke del 4 av gradskivepostulatet er strengt tatt at strålen  $\overrightarrow{CA}$  ligger mellom strålene  $\overrightarrow{CD}$  og  $\overrightarrow{CB}$ . Men *per definisjon* betyr dette at  $A$  ligger i det indre av  $\angle BCD$ . Dermed kan vi trygt bruke del 4 av gradskivepostulatet når vi vet at  $A$  ligger i det indre av  $\angle BCD$ .



Figur 1: Figur til oppgave 4.6 2.

**4.8 5** Vi skal vise teorem 4.8.10. I denne oppgaven vil derfor  $\triangle ABCD$  være en Saccheri-firkant, altså er  $\angle ABC$  og  $\angle DAB$  er rette og  $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ . Siden teoremet har 6 deler, må vi vise 6 påstander.

1.  $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ : Vi betrakter de to trekantene  $\triangle ABD$  og  $\triangle BAC$ , se figur 2. Per antagelse vet vi følgende:

$$\overline{AD} \cong \overline{BC} \quad \overline{AB} \cong \overline{BA} \quad \mu(\angle ABD) = \mu(\angle BAC) = 90^\circ.$$

Dermed gir SAS at  $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ , og spesielt er  $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ .

2.  $\angle BCD \cong \angle ADC$ : Denne gangen vender vi blikket mot trekantene  $\triangle ADC$  og  $\triangle BCD$ . Siden vi nettopp viste at  $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ , vet vi nå at alle sidene i disse trekantene er kongruente. Dermed gir SSS at  $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ , og spesielt  $\angle BCD \cong \angle ADC$ .
3. Linjestykket fra midtpunktet av  $\overline{AB}$  til midtpunktet av  $\overline{CD}$  står vinkelrett på  $\overline{AB}$  og  $\overline{CD}$ : La  $M$  være midtpunktet på  $\overline{AB}$  og  $N$  midtpunktet på  $\overline{CD}$ . Se figur 3; vi begynner med å kikke på trekantene  $\triangle AMD$  og  $\triangle BMC$ . Siden  $\overline{AM} \cong \overline{BM}$  da  $M$  er midtpunktet på  $\overline{AB}$ , kan vi bruke SAS til å si at

$$\triangle AMD \cong \triangle BMC.$$

Spesielt er

$$\overline{DM} \cong \overline{CM}.$$

Men dermed vet vi at *alle* sidene i  $\triangle DMN$  og  $\triangle CMN$  er kongruente, slik at SSS gir

$$\triangle DMN \cong \triangle CMN.$$

Spesielt må

$$\mu(\angle MND) = \mu(\angle MNC),$$

og siden  $\angle MND$  og  $\angle MNC$  er supplementærvinkler vet vi av lineært par-teoremet at

$$180^\circ = \mu(\angle MND) + \mu(\angle MNC) = 2\mu(\angle MND),$$

slik at  $\mu(\angle MND) = 90^\circ$ , som viser at  $\overline{MN} \perp \overline{CD}$ .

Det gjenstår å vise at  $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ , men beviset for denne påstanden er veldig likt beviset for første del, så vi skisserer det bare raskt. Siden vi vet fra del 2 at  $\angle BCD \cong \angle ADC$ , kan vi bruke SAS til å konkludere med at  $\triangle BCN \cong \triangle ADN$ , og spesielt  $\overline{AN} \cong \overline{BN}$ . Da gir SSS at  $\triangle AMN \cong \triangle BMN$ , og spesielt at  $\angle AMN \cong \angle BMN$ . Som i første del kan vi da bruke lineært-par-teoremet til å konkludere med at  $\angle AMN$  er rett.

4.  $\square ABCD$  er et parallelogram: Siden linja  $\overleftrightarrow{AB}$  skjærer  $\overleftrightarrow{AD}$  og  $\overleftrightarrow{BC}$  slik at skjæringsvinklene er rette, gir alternerende indre vinkel-teorem at  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ . Tilsvarende skjærer  $\overleftrightarrow{MN}$  linjene  $\overleftrightarrow{AB}$  og  $\overleftrightarrow{CD}$  slik at skjæringsvinklene er rette (dette er resultatet fra del 3 av denne oppgaven), og alternerende indre vinkel-teoremet gir at  $\overleftrightarrow{AB} \cong \overleftrightarrow{CD}$ <sup>2</sup>.
5.  $\square ABCD$  er konveks: Vi har vist at  $\square ABCD$  er et parallelogram, og i forrige øving viste vi teorem 4.6.6 som sa at alle parallelogram er konvekse. Dermed er vi ferdige.
6. Vinklene  $\angle BCD$  og  $\angle CDA$  er enten rette eller spisse: Vi må vise at  $\mu(\angle BCD) \leq 90^\circ$  og at  $\mu(\angle CDA) \leq 90^\circ$ . Fra teorem 4.6.4 vet vi at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCD) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) \leq 360^\circ.$$

Vi vet at  $\mu(\angle ABC) = \mu(\angle DAB) = 90^\circ$  og fra deloppgave 2 at  $\mu(\angle CDA) = \mu(\angle BCD)$ . Setter vi dette inn i ligningen over får vi

$$2\mu(\angle CDA) \leq 180^\circ,$$

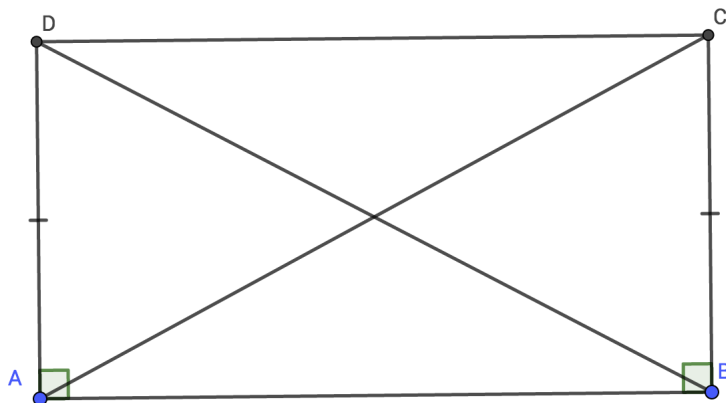
slik at  $\mu(\angle CDA) = \mu(\angle BCD) \leq 90^\circ$ .

**4.8 8** La  $\square ABCD$  være en Lambert-firkant, altså en firkant hvor vinkelen ved de tre hjørnene  $A, B$  og  $C$  er rette. Vi skal vise fire utsagn. Se figur 4.

1.  $\square ABCD$  er et parallelogram: Dette følger lett fra alternerende indre vinkel-teoremet, nærmere bestemt korollar 4.4.8<sup>3</sup>. Vi har at  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$  og at  $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$  siden  $\square ABCD$  er en Lambert-firkant. Siden vi åpenbart ikke har at  $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{BC}$ , gir korollar 4.4.8 at  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ . Helt tilsvarende har vi at  $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{CD}$  og  $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ , slik at korollar 4.4.8 gir at  $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ . Dermed er firkanten et parallelogram.
2.  $\square ABCD$  er konveks: Vi har vist at  $\square ABCD$  er et parallelogram, og i forrige øving viste vi teorem 4.6.6 som sa at alle parallelogram er konvekse. Dermed er vi ferdige.

<sup>2</sup>Vi var litt raske her. Mer detaljert vet vi at  $\mu(\angle AMN) = \mu(\angle DNM) = 90^\circ$ , og av lineært par-teoremet vet vi da også at  $\mu(\angle CNM) = 90^\circ$ . Dermed er de to alternerende indre vinklene  $\angle AMN$  og  $\angle CNM$  kongruente, slik at vi kan bruke AIVT. Vi kunne også referert til korollar 4.4.8, som omhandler denne situasjonen

<sup>3</sup>Det er heller ikke vanskelig å argumentere rett fra AIVT; faktisk utførte vi et slikt argument i forrige fotnote.



Figur 2: Figur til de to første delene av oppgave 4.8 5.

3.  $\mu(\angle CDA) \leq 90^\circ$  : fra teorem 4.6.4 vet vi at

$$\mu(\angle ABC) + \mu(\angle BCD) + \mu(\angle CDA) + \mu(\angle DAB) \leq 360^\circ.$$

Siden alle andre vinkler enn  $\angle CDA$  er rette, gir dette at

$$270^\circ + \mu(\angle CDA) \leq 360^\circ,$$

og dermed er  $\mu(\angle CDA) \leq 90^\circ$ .

4.  $BC \leq AD$  : Vi antar  $BC > AD$ , og viser at dette fører til en motsigelse. Ved hjelp av linjalpostulatet kan vi finne et punkt  $P \in \overline{BC}$  slik at  $BP = AD$ <sup>4</sup> – se figuren. Da er  $\square ABPD$  en Saccheri-firkant. Fra siste del av teorem 4.8.10 (altså forrige oppgave) vet vi da at

$$\mu(\angle BPD) \leq 90^\circ.$$

Men  $\angle BPD$  er også en ytre vinkel til trekanten  $\triangle PCD$ , slik at ytre vinkelteoremet gir

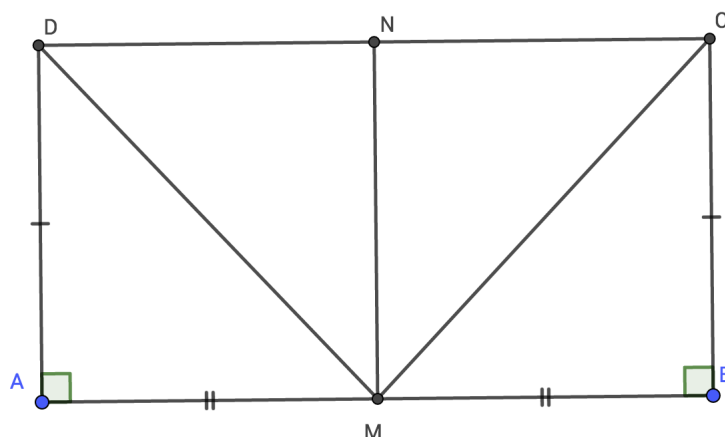
$$\mu(\angle BPD) > \mu(\angle PCD) = 90^\circ.$$

De to siste ligningene kan selvsagt ikke stemme samtidig, så vi må forkaste vår antagelse  $BC > AD$ .

**5.1 2** Vi skal vise teorem 5.1.10. I denne oppgaven er  $\square ABCD$  er parallelogram, som betyr at  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$  og  $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ . Vi skal vise fire utsagn.

1.  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$  og  $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ : Vi viser  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ , den andre kongruensen følger ved akkurat samme argument. Se også figur 6. Vi vet at

<sup>4</sup>Helt nøyaktig: Vi bruker teorem 3.2.23 til å finne et punkt  $P$  på  $\overrightarrow{BC}$  slik at  $BP = AD$ . Siden  $BP = AD < BC$  per antagelse, gir korollar 3.2.18 at  $B * P * C$ , slik at  $P \in \overline{BC}$ .



Figur 3: Figur til del 3 av oppgave 4.8 5. Figuren er tilpasset første del av denne deloppgaven der vi viser  $\mu(\angle MND) = 90^\circ$ , men bør også være til god hjelp for andre del. Vi bruker SAS til å vise  $\triangle AMD \cong \triangle BMC$  slik at  $\overline{DM} \cong \overline{CM}$ . Dermed gir SSS at  $\triangle DMN \cong \triangle CMN$ . Spesielt er  $\mu(\angle MND) = \mu(\angle MNC)$ , og siden disse to vinklene også er supplementvinkler må vi ha  $\mu(\angle MND) = 90^\circ$ .

$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ , og at disse linjene skjæres av  $\overleftrightarrow{AC}$  i henholdsvis  $A$  og  $C$ . Det motsatte alternerende indre vinkler-teoremet (MAIVT, teorem 5.1.1) gir derfor at

$$\angle DAC \cong \angle BCA.$$

På tilsvarende vis vet vi at  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  og at disse to linjene skjæres av  $\overleftrightarrow{AC}$  i henholdsvis  $A$  og  $C$ . Det motsatte alternerende indre vinkler-teoremet (MAIVT, teorem 5.1.1) gir derfor at

$$\angle CAB \cong \angle ACD.$$

Nå vet vi at

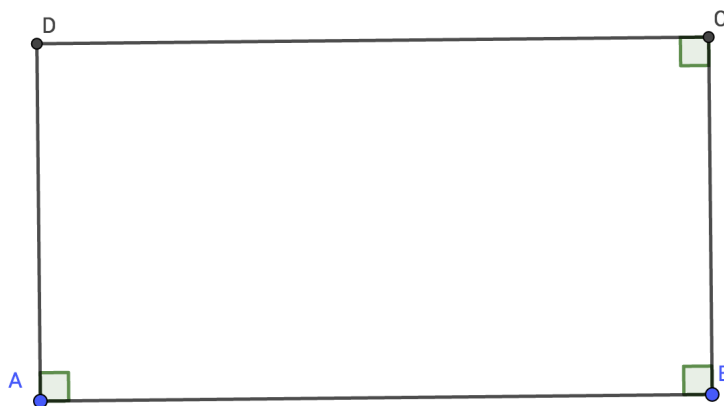
$$\angle DAC \cong \angle BCA \quad \angle CAB \cong \angle ACD \quad \overline{AC} \cong \overline{CA},$$

og derfor gir ASA at  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ .

2.  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  og  $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ : Fra første del har vi  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ . Da må spesielt  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ . På tilsvarende vis får vi at  $\overline{BC} \cong \overline{AD}$  fordi  $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ .
3.  $\angle DAB \cong \angle BCD$  og  $\angle ABC \cong \angle CDA$ : Som i del 2 følger dette rett fra kongruensene i del 1.
4. Diagonalene  $\overline{AC}$  og  $\overline{BD}$  skjærer hverandre i et punkt  $P$  slik at  $AP = PC$  og  $BP = PD$ : Vi vet at  $\square ABCD$  er konveks av teorem 4.6.6 (som sier at alle parallelogram er konvekse). Videre sier teorem 4.6.8 at diagonalene i en konveks firkant skjærer hverandre i det indre, og derfor vet vi at  $\overline{AC}$  og  $\overline{BD}$  skjærer hverandre i et punkt som vi kaller  $P$ . Det gjenstår å vise at  $AP = PC$  og  $BP = PD$ . Se også figur 7.

Vi argumenterer nå som vi gjorde i del 1. Vi vet at  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  og at disse to linjene skjæres av  $\overleftrightarrow{AC}$  i henholdsvis  $A$  og  $C$ . Det motsatte alternerende indre vinkler-teoremet (MAIVT, teorem 5.1.1) gir derfor at

$$\angle PAB \cong \angle PCD.$$



Figur 4: Figur til oppgave 4.8 5. Merk at siste del av oppgaven har en egen figur.

De samme linjene skjæres også av  $\overleftrightarrow{BD}$  i henholdsvis  $B$  og  $D$ , og det motsatte alternerende indre vinkler-teoremet gir at

$$\angle ABP \cong \angle PDC.$$

Fra del 2 vet vi også at

$$\overline{AB} \cong \overline{CD},$$

og disse tre kongruensene lar oss bruke ASA til å konkludere med at

$$\triangle ABP \cong \triangle CDP.$$

Spesielt er da  $AP = PC$  og  $BP = PD$ .

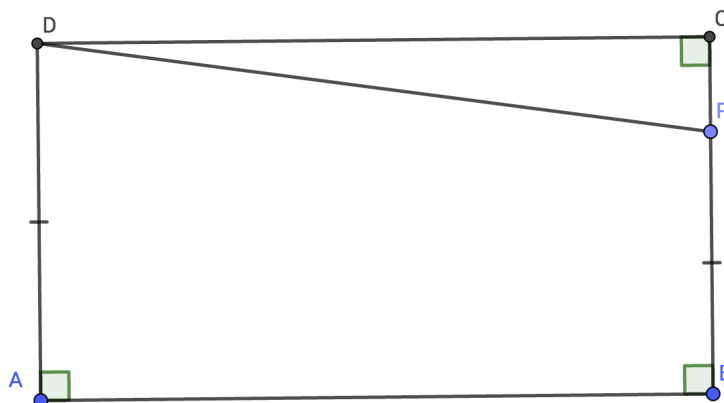
**5.1 3** La  $\square ABCD$  være en firkant slik at  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  og  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  – se figuren. Vi skal vise at  $\square ABCD$  er et parallelogram, altså at vi også har  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ . For å vise dette kommer vi til å bruke alternerende indre vinkler-teoremet (AIVT, teorem 4.4.2) og det motsatte alternerende indre vinkler-teoremet (MAIVT, teorem 5.1.1). La  $t = \overleftrightarrow{AC}$ . Da skjærer  $t$  de to parallelle linjene  $\overleftrightarrow{AB}$  og  $\overleftrightarrow{CD}$  i henholdsvis  $A$  og  $C$ , og MAIVT gir at

$$\angle CAB \cong \angle ACD.$$

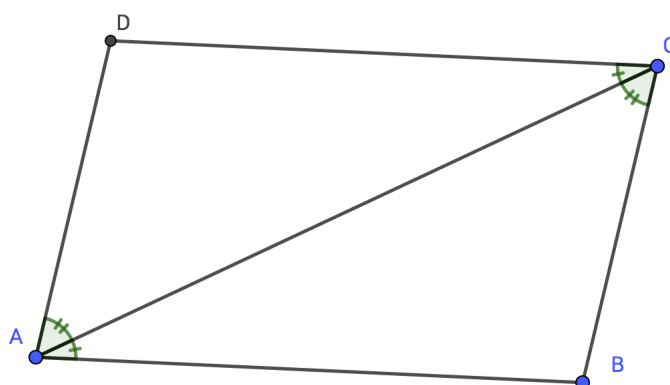
Nå har vi at

$$\overline{AC} \cong \overline{AC} \quad \overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \angle CAB \cong \angle ACD$$

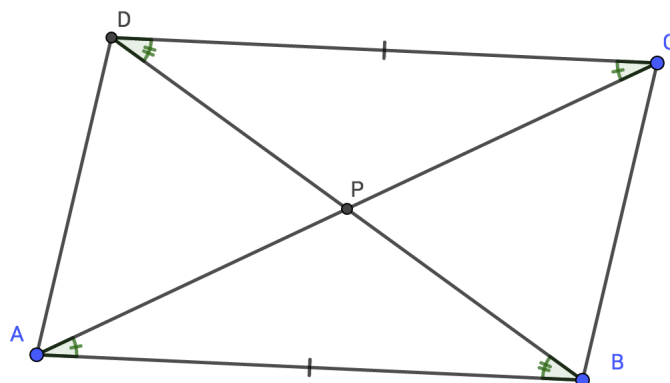
slik at SAS gir at  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ . Spesielt må  $\angle DAC \cong \angle BCA$ . Men da skjærer  $t$  linjene  $\overleftrightarrow{AD}$  og  $\overleftrightarrow{BC}$  i punktene  $A$  og  $C$  slik at  $\angle DAC \cong \angle BCA$ , og dermed gir AIVT at  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ .



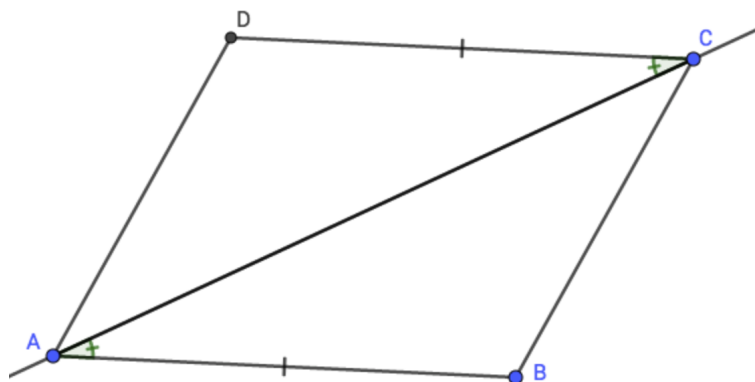
Figur 5: Figur til siste del av oppgave 4.8 8. Vi antar  $AD > BC$ , og søker en motsigelse. Vi finner  $P \in \overline{BC}$  slik at  $BP = AD$  ved linjalpostulatet. Siden  $\square ABPD$  er en Saccheri-firkant får vi at  $\mu(\angle BPD) \leq 90^\circ$ . Men ytre vinkel-teoremet gir også at  $\mu(\angle BPD) > \mu(\angle PCD) = 90^\circ$ . Dermed har vi en motsigelse.



Figur 6: Figur til de tre første delene av oppgave 5.1 2. Vi bruker MAIVT til å vise at de markerte vinklene er like, og får da at  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$  med ASA.



Figur 7: Figur til siste del av oppgave 5.1 2. Vi bruker MAIVT til å vise at de markerte vinklene er like. De to markerte sidene er like av del 2 av samme oppgave. Derfor kan vi bruke ASA til å konkludere at  $\triangle ABP \cong \triangle CDP$ , som spesielt gir de to ønskede kongruensene.



Figur 8: Figur til oppgave 5.1.3. Vi bruker MAIVT til å vise at de to markerte vinklene er like. Så bruker vi SAS til å slå fast at  $\angle DAC \cong \angle BCA$ , og da gir AIVT at  $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ .